MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

INTRODUCTION SISTEM LINIER

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	01	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Liner merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

Sistem Linier

INTRODUCTION SISTEM LINIER

Kuliah Sistem Linier merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linier memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Tujuan :

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

Penilaian:

- Absen : 10%
- Tugas : 30%
- UTS : 30%
- UAS : 30%

Kepustakaan :

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

Silabus

1. **Introduction Sistem Linier**
2. **Analisis Fourier**
3. **Transformasi Fourier**
4. **Transformasi Laplace**
5. **Aplikasi Transformasi Laplace**
6. **Transformasi Z**
7. **Inverse transformasi Z**
8. **State Variabel**

- Analisa system linier sering dilakukan dengan menggunakan sekelompok sinyal masukan tertentu. Jadi adalah wajar untuk menyertakan telaah sinyal dan berbagai penyelasaian dalam mempelajari system linier.

- Suatu system dikatakan system linier, jika dan hanya jika berlaku hukum superposisi, artinya jika inputnya dijumlah aljabarkan, maka outputnya pun akan mengikuti seperti inputnya

Sistem Waktu Diskrit

x(n) → Sistem waktu Disktrit → y (n)

x(n) dan y(n) adalah sinyal waktu diskrit.

y(n) = T $\left| x(n) \right|$

y(n) adalah transformasi dari x(n)

x(n) $\xrightarrow{T}$ y (n)

y(n) = T $\left| x(n) \right|$

y (n) disebut jg respon sistem

1. Tentukan respon dari sistem-sistem yang dideskripsikan dengan sinyal

   x (n) $\begin{cases} |n| \\ 0 \end{cases}$ -3 $\leq n \leq$ 3 yang kekirinya

   a. y (n) = x (n)

   b. y (n) = x (n-1)

   c. y (n) = x (n + 1)

   d. y (n) = $\frac{1}{3}\left\{x(n+1) + x(n) + x(n-1)\right\}$

Jawaban

1. x(n) = $\{......0,-3,-2,-1,0,1,2,3,0......\}$

a. y(n) = x(n) $\{......0,-3,-2,-1,0,1,2,3,0......\}$

b. y(n) = x (n-1) $\{......0,-3,-2,-1,0,1,2,3,0......\}$

y(n) = x (n-1) = $\left\{\begin{matrix} |n-1| \\ 0 \end{matrix}\right. -3 \leq n-1 \leq 3 \}$

c. y (n) = x (n + 1) = $\{......0,-3,-2,-1,0,1,2,3,0......\}$

d. y (n) = $\frac{1}{3}\{x(n+1)+x(n)+x(n-1)\}$

y(0) = 1/3 (1 + 0 + 1) = 2/3

y (1) = 1/3 (2 + 1 + 0) = 1

y(2) = 1/3 (5 + 2 + 1) = 2

y (3) = 1/3 (0 + 3 + 2) = 5/3

y(-1) = 1/3 (0 + 1 + 2) = 1

y(-2) = 1/3 (1 + 2 + 3) = 2

y(-3) = 1/3 (2 + 3 + 0) = 5/3

y(n) $\left\{.....0,0,1,\tfrac{5}{3},2,1,\tfrac{2}{3},1,2,\tfrac{5}{3},1,0,0\right\}$

Klasifikasi Sistem Waktu Diskrit

- Sistem statis
  Sistem statis adalah sistem yang keluarannya hanya bergantung dari masukan pada saat tersebut, jadi tidak bergantung pada saat sebelumnya disebut sistem tanpa memory

  y(n) = 3 x(n)

  y(n) = nx(n) + 5x ^{3}(n)

- Sistem Dinamis
  Sistem dinamis adalah sistem yang kekuatannya bergantung dari masukan sebelumnya, disebut sistem dengan memori

  y(n) = 5x(n) + 2x(n-1)

  y(n) = x(n+2) – x(n-1)

- Sistem Invarian Waktu
  Sistem invarian waktu adalah sistem yang karakteristik masukan keluarannya tidak berubah menurut waktu.

  y(n,k) = y(n-k)

y(n) = x(n)-x(n-1)

$x(n) \rightarrow \boxed{} \xrightarrow{x(n)-x(n-1)}$ $\qquad$ $x(n) \rightarrow \boxed{} \xrightarrow{x(n)-x(n-1)}$

y(n) = x (n) – x(n-1)

y(n-k) = x (n-k) – x(n-k-1)

y(n) = y(n-k)

- Sistem Varian Waktu

  Sistem varian waktu adalah sistem yang karakteristik masukan keluarannya berubah menurut waktu.

y(n,k) $\neq$ y(n-k)

y(n) = n x (n)

$x(n) \rightarrow \boxed{} \xrightarrow{n\,x(n)}$ $\qquad$ $x(n-k) \rightarrow \boxed{} \xrightarrow{n\,(n-k)}$

y(n) = n x (n)

y (n-k) = (n-k) x (n-k)

y (n,t) $\neq$ y (n-k)

- Sistem Linier

  Sistem linier adalah suatu sistem yang memenuhi prinsip superposisi, yaitu bahwa respon sistem terhadap jumlah bobot sinyal masukan akan sama dengan bobot sinyal keluaran.

$$T\,[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)]$$

y(n) = n x(n)

misalnya $x_1(n) \longrightarrow y_1(n)$

$x_2(n) \longrightarrow y_2(n)$

T $\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n)$

$a_1T\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n)$

Sistem Linier

y(n) – x(n^2)

Misalnya x_1 (n^2).x_2(n^2)

T $\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a_1x_1(n^2)+a_2x_2(n^2)$

$a_1T\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]=a_1+1(n^2)+a_2x_2(n^2)$

Sistem Linier

- Sistem Non Linier

  Sistem Non Linier adalah suatu sistem yang tidak memenuhi prinsip superposisi.

y(n) = x^2(n)

x_1^2(n) dan x_2^2(n)

T $\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=\left\{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right\}^2$

= $a_1^2x_1^2n + 2^a{}_1a_2x_1(n) + a_2^2x_2^2(n)$

a_1T $\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]=a_1x_1{}^2(n)+a_2x_2{}^2(n)$

Non Linier

- Sistem Kausal dan Non Kausal

  Sistem Kausal adalah keluaran sistem untuk setiap waktu dan hanya bergantung pada masukan sistem saat ini, atau sebelumnya dan tidak bergantung pada masukan sistem yang akan datang. Jika tidak seperti ini dikatakan sistem non kausal.

  y(n) = x(n) - x(n-1)

  y(1) = x(1) – x(0)

  y(2) = x(2) – x(1) } Sistem Kasual

  y(3) = x(3) – x(2)

  y(n) = ax(n)

  y(1) = a x (1) } Kasual

  y(2) = a x (2)

  y(n) = x(n) + 3x(n + 4) } Non Kasual

  y(1) = x(1) + 3x (5)

  y(n) = x (n^2)

  y(2) = x (4)Non kasual

  y(n) = x(-n) Non kasual

- Sistem Stabil dan Tidak Stabil

  Suatu Sistem dikatakan stabil jika dan hanya jika sinyal keluarannya terbatas/berhingga

  - $|x(n)| \le M_x |y(n)| \le M_y$
  - Dengan M_x < ~ dan M_y < ~
  - y(n) = cos $[x(n)]$
  - - ~ < x(n)<~ ⟶ -1<y(n)<1

$|y(n)| < 1$ = stabil

Deret sn $\frac{a}{i-r}$ a = suku pertama

r = ratio r = $\frac{V_s + 1}{V_s}$

y(n) = y^2 (n-1) + x(n)

dengan x(n) = c S(n)

y(-1) = 0

c = konstanta

S(n) = $\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

y(n) = y^2 (n-1) + x(n)

y(0) = 0 + c = c

y(1) = c^2

y(2) = y^2(1) = c^4

y(3) = y^2(2) = c^8

$|c|$ > 1 Sistem tidak stabil

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

ANALISA FOURIER

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	02	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Modul ini menjelaskan Deret Fourier

Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami Deret Fourier

ANALISA FOURIER

Bentuk Trigonometris dari Deret Fourier

Mula-mula kita tinjau sebuah fungsi periodik f(t) yang didefinisikan sebagai :

$$f(t) = f(t + T)$$

dengan T adalah peroda. Selanjutnya kita anggap bahwa fungsi f(t) memenuhi sifat-sifat berikut :

1. f(t) berharga tunggal dimana-mana, yakni f(t) memenuhi definisi matematis dari sebuah fungsi.
2. Integral $\int_{t_o}^{t_o+T} |f(t)|\, dt$ ada (yakni, tidak tak berhingga) untuk setiap pemilihan t_o
3. f(t) mempunyai diskontinuitas yang terbatas banyaknya didalam setiap perioda
4. f(t) mempunyai maksimum dan minimum yang terbatas banyaknya didalam setiap perioda.

Meskipun mungkin ada fungsi matematik tertentu tidak memenuhi keempat syarat tersebut, akan tetapikita akan menganggap bahwa keempat syarat tersebut selalu dipenuhi. Dengan adanya fungsi periodik f(t) seperti itu, maka teorema Fourier mengatakan bahwa f(t) dapat dinyatakan dengan deret tak berhingga :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\sim} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

dengan frekuensi fundamental ω_0 dihubungkan dengan perioda T oleh

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

dengan a_0,a_n dan b_n adalah konstanta yang tergantung pada n dan f(t), konstanta ini kita namakan konstanta Fourier. Persamaan (1) adalah bentuk trigonometris dari ***deret Fourier*** untuk f(t). Harga a_0,a_n dan b_n dalam deret Fourier pada persamaan (1) adalah:

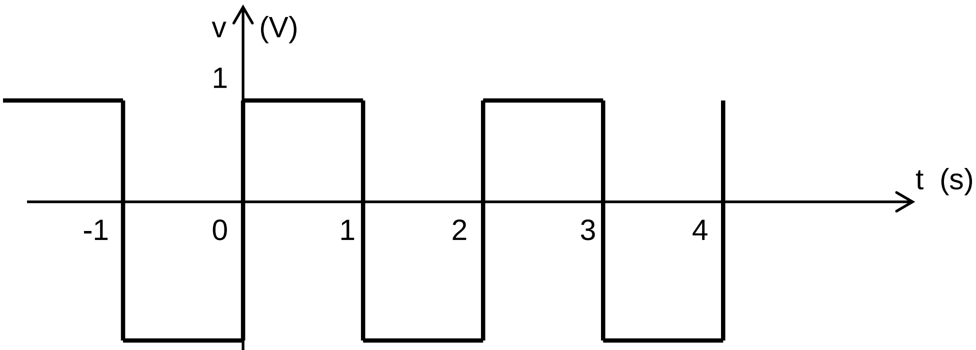
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin n\omega_0 t\; dt$$

Perlu diketahui untuk mendapatkan hasil integrasi dengan batas antara 0 sampai dengan T ($\int_0^T f(t)\,dt$), kita tidak harus mengintegrasi dari 0 sampai T, tapi yang penting jaraknya sejauh T, jadi integral tersebut dapat diganti dengan $\int_\tau^{\tau+T} f(t)\,dt$.

Tulislah deret Forier dari gelombang tegangan dibawah ini



Jawab : Perioda bentuk gelombang tegangan diatas adalah 2 detik, persamaan v(t) dalam satu perioda adalah :

$$v(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Maka harga a_0,a_n dan b_n dapat kita hitung sebagai berikut :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -1\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\big|_0^1 - t\big|_1^2\right] = \frac{1}{2}\left[(1-0)-(2-1)\right] = 0$$

$a_0 = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos n\omega_0 t\; dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 \cos n\pi t\ dt + \int_1^2 -\cos n\pi t\ dt\right]$$

$$= \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\bigg|_0^1 - \frac{\sin n\pi t}{n\pi}\bigg|_1^2\right]$$

$$= \left[\frac{(\sin n\pi - \sin 0)}{n\pi} - \frac{(\sin 2n\pi - \sin n\pi)}{n\pi}\right] = 0$$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 \sin n\pi t\ dt + \int_1^2 -\sin n\pi t\ dt\right]$$

$$= \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\bigg|_0^1 + \frac{\cos n\pi t}{n\pi}\bigg|_1^2\right]$$

$$= \left[\frac{(-\cos n\pi + \cos 0)}{n\pi} + \frac{(\cos 2n\pi - \cos n\pi)}{n\pi}\right]$$

$$= \left[\frac{2 - 2\cos n\pi}{n\pi}\right]$$

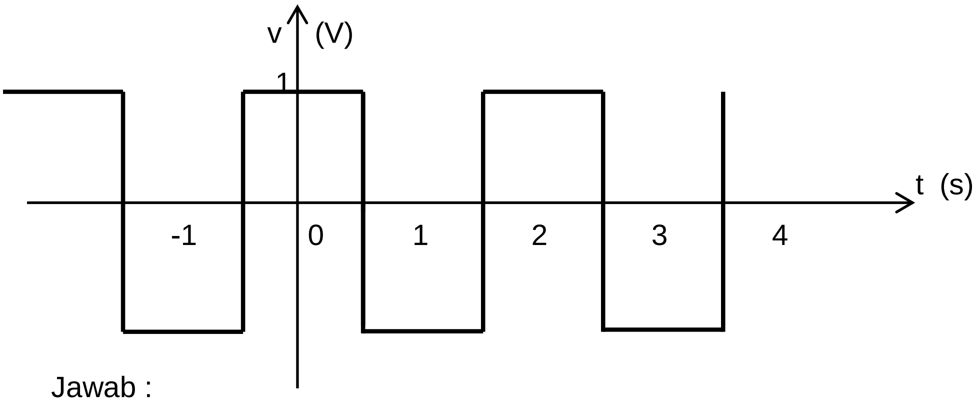
n ganjil $\longrightarrow$ $b_n = \left[\frac{2-(-2)}{n\pi}\right] = \frac{4}{n\pi}$

n genap $\longrightarrow$ $b_n = \left[\frac{2-2}{n\pi}\right] = 0$

maka persamaan v(t) dalam bentuk deret Fourier adalah :

$$v(t) = \frac{4}{\pi}(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \frac{1}{7}\sin 7\pi t + ..\ )\ V$$

Soal latihan : Tulislah deret Fourier untuk dua gelombang tegangan dibawah ini :



Jawab :

Maka harga a_0,a_n dan b_n dapat kita hitung sebagai berikut :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1/2}^{1/2} 1\, dt + \int_{1/2}^{3/2} -1\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\Big|_{-1/2}^{1/2} - t\Big|_{1/2}^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1) - (1)\right]$$

= 0

$a_0 = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_{-1/2}^{1/2} \cos n\pi t\, dt + \int_{1/2}^{3/2} -\cos n\pi t\, dt\right]$$

$$= \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\Bigg|_{-1/2}^{1/2} - \frac{\sin n\pi t}{n\pi}\Bigg|_{1/2}^{3/2}\right]$$

$$= \left[\frac{\left(\sin n\frac{\pi}{2} - \sin n\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} - \frac{\left(\sin n\frac{3\pi}{2} - \sin n\left(\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} \right]$$

$$= \left[\frac{\left(\sin n\left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin n\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} - \frac{\sin n\left(\frac{3\pi}{2} \right)}{n\pi} + \frac{\sin n\left(\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} \right]$$

$$= \frac{2\sin n\left(\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} - \frac{\sin n\left(-\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} - \frac{\sin n\left(\frac{3\pi}{2} \right)}{n\pi}$$

$n\ ganjil$

$$= \frac{4}{\pi}$$

$n\ genap$

$$= \frac{0+0}{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_{-1/2}^{1/2} \sin n\pi t\ dt + \int_{1/2}^{3/2} -\sin n\pi t\ dt \right]$$

$$= \left[\left. \frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right|_{-1/2}^{1/2} + \left. \frac{\cos n\pi t}{n\pi} \right|_{1/2}^{3/2} \right]$$

$$= \left[\frac{\left(-\cos n\frac{\pi}{2} + \cos n\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} + \frac{\left(\cos n\frac{3\pi}{2} - \cos n\left(\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} \right]$$

$$= \left[\frac{\left(-\cos n\left(\frac{\pi}{2} \right) + \cos n\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}{n\pi} + \frac{\cos n\left(\frac{3\pi}{2} \right)}{n\pi} + \frac{\cos n\left(\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} \right]$$

$$= \frac{-2\cos n\left(\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} + \frac{\cos n\left(-\frac{\pi}{2} \right)}{n\pi} + \frac{\cos n\left(\frac{3\pi}{2} \right)}{n\pi}$$

$$=$$

$n\ ganjil$

$= 0$

$n\ genap$

$$= \frac{-2(-1)}{2\pi} + \frac{(-1)}{2\pi} + \frac{(-1)}{2\pi} = 0$$

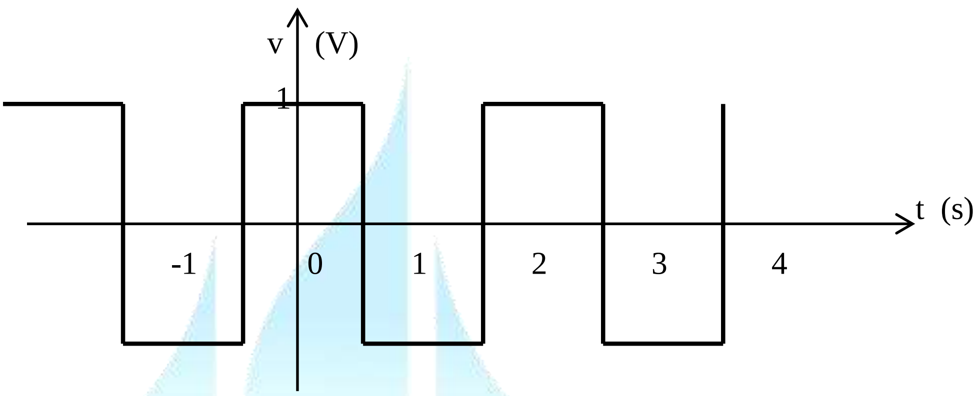
Maka deret fouriernya adalah

$$v(t) = \frac{4}{\pi}(\cos \pi t - \frac{1}{3}\cos 3\pi t + \frac{1}{5}\cos 5\pi t - \frac{1}{7}\cos 7\pi t + ..\ )\ V$$

Soal latihan :

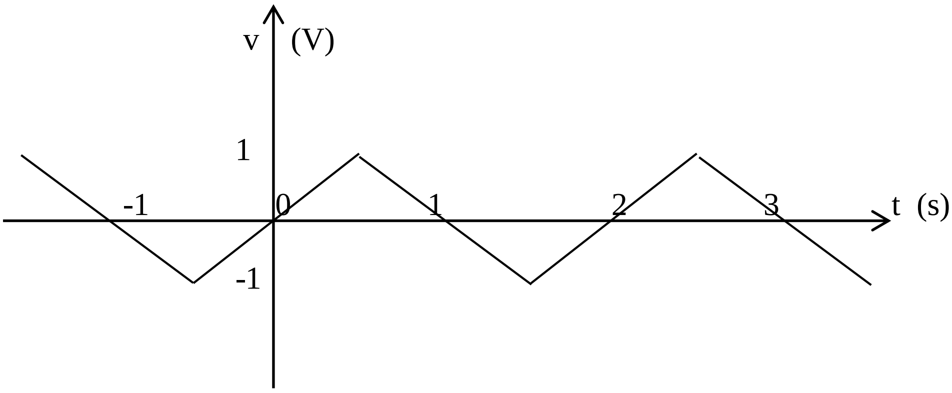
Tulislah deret Fourier untuk dua grlombang tegangan dibawah ini :

1.



Jawab : $v(t) = \frac{4}{\pi}(\cos n\pi t - \frac{1}{3}\cos 3n\pi t + \frac{1}{5}\cos 5n\pi t - \frac{1}{7}\cos 7n\pi t + ..\ )\,V$

2.



Jawab : $v(t) = \frac{8}{\pi^2}(\sin n\pi t - \frac{1}{9}\sin 3n\pi t + \frac{1}{25}\sin 5n\pi t - \frac{1}{49}\sin 7n\pi t + ..\ )\,V$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

ANALISA FOURIER (lanjutan)

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	03	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

ANALISA FOURIER (lanjutan)

Penggunaan Simetri

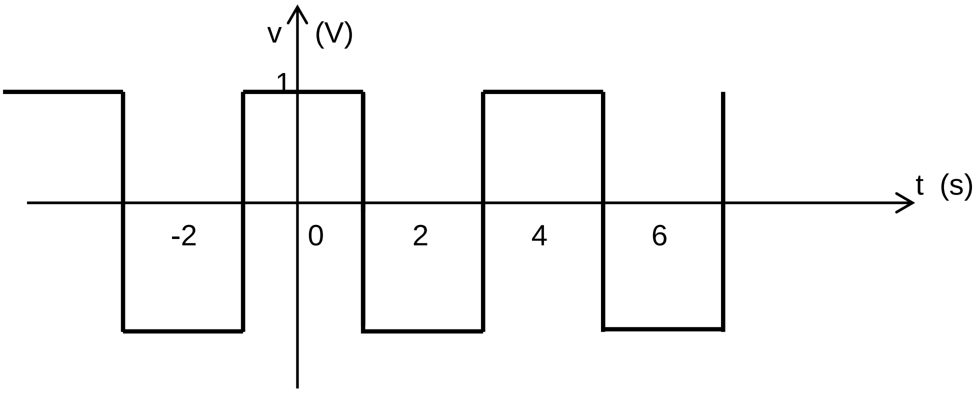
Kedua jenis simetri yang paling mudah dikenal adalah simetri fungsi genap dan simetri fungsi ganjil, atau singkatnya simetri genap dan simetri ganjil.

Kita katakan bahwa f(t) simetri genap, jika dan hanya jika

$$\boxed{f(t) = f(-t)}$$

Fungsi-fungsi seperti t^2, cos 5t, ln (cos t), $\sin^2 7t$, t sin t dan konstanta C, semua fungsi tersebut simetri genap sebab penggantian t dengan (- t) tidak mengubah nilai fungsi-fungsi tersebut. Jenis simetri seperti ini dapat juga dikenal secara grafis, karena jika f(t)=f(-t) maka terdapat simetri cermin pada sumbu f(t)/sumbu Y.

Contoh gelombang simetri fungsi genap :

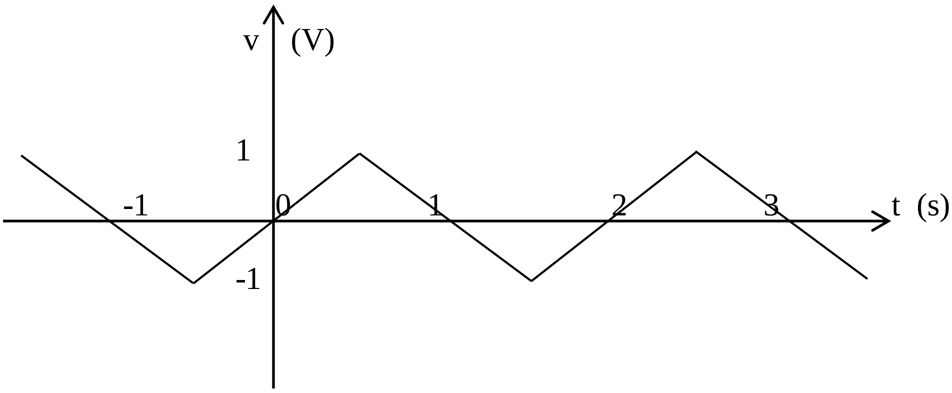


Kita definisikan bahwa f(t) simetri ganjil, jika dan hanya jika :

$$\boxed{f(t) = - f(-t)}$$

Dengan kata lain , jika t diganti dengan (- t), maka akan didapatkan negatif dari fungsi yang diketahui, contohnya : t, sin t, t cos 35t, $t\sqrt{1+t^2}$. Karakteristik grafis dari simetri ganjil adalah jelas, yaitu jika kita bergerak dari t = 0 sejauh a kearah kanan (sumbu t positif) dan bergerak dari t = 0 sejauh a juga kearah kiri (sumbu t negatif) , maka nilai f(t) berlawanan tanda.

Contoh gelombang simetri fungsi ganjil :



1. Fungsi periodik simetri genap tidak mungkin mengandung komponen sinus (sebab fungsi sinus adalah simetri ganjil), dengan kata lain konstanta $\boldsymbol{b_n = 0}$
2. Fungsi periodik simetri ganjil tidak mungkin mengandung komponen cosinus (sebab fungsi cosinus adalah simetri genap), dengan kata lain konstanta $\boldsymbol{a_n = 0}$

Secara matematis dapat dituliskan persamaan untuk menghitung konstanta a_n dan b_n untuk fungsi simetri genap dan simetri ganjil.

Simetri Genap :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$b_n = 0$$

Simetri Ganjil :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\ dt$$

Deret Fourier untuk setiap gelombang siku-siku (square wave) mempunyai unik dan menarik, yaitu tidak mengandung harmonisa genap (harga a_n dan b_n berharga nol untuk n genap), artinya komponenfrekuensi yang terdapat dalam deret Fourier hanya mempunyai frekuensi yang merupakan kelipatan ganjil dari frekuensi fundamentalnya. Hal ini disebabkan oleh jenis simetri lain, yang dinamai ***simetri gelombang setengah*** (half wave symmetry). Kita definisikan bahwa f(t) memiliki simetri gelombang setengah , jika dan hanya jika :

$$f(t) = f(t \pm \frac{1}{2}T)$$

Contoh lain dari fungsi simetri gelombang setengah adalah fungsi segi tiga (gigi gergaji) atau fungsi tegangan pada contoh soal dan dan kedua fungsi pada soal latihan diatas.

Persamaan matematis untuk menghitung a_n dan b_n untuk fungsi simetri gelombang setengah :

Simetri gelombang setengah :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$ n ganjil

$a_n = 0$ n genap

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$ n ganjil

$b_n = 0$ n genap

Simetri genap +gelombang setengah :

$$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$ n ganjil

$a_n = 0$ n genap

$b_n = 0$ semua n

Contoh Soal :

F(x) = $\begin{cases} 2, 0<x<3 \\ -2, -3<x<0 \end{cases}$ Periode 6

$a_0 = 0$

a_n = 1/3 $\int_{-3}^{3}$ f(x) cos $n\pi x/3$ dx

= 1/3 $\int_{-3}^{0}$ -2 cos $\frac{n\pi x}{3}$ dx + 1/3 $\int_{3}^{0}$ 2 cos $\frac{n\pi x}{3}$ dx

= - 2/3 $\int_{-3}^{0}$ cos $\frac{n\pi x}{3}$ dx + 2/3 $\int_{0}^{3}$ 2 cos $\frac{n\pi x}{3}$ dx

Misal u = $\frac{n\pi x}{3}$

du = $\frac{n\pi}{3}$

dx = $\frac{3}{n\pi}$

= - 2/3 $\int_{-3}^{0}$ cos u $\frac{3}{n\pi}$ + 2/3 $\int_{0}^{3}$ 2 cos u $\frac{3}{n\pi}$

= - $\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}$ + $\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{0}^{3}$

$$= \left[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi(0)}{3}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi(-3)}{3}\right]+\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi(3)}{3}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi(0)}{3}\right]$$

= 0

b_n = 1/3 $\int_{-3}^{3}$ f(x). Sin n π x/3 dx

=

= 1/3 $\int_{-3}^{0}$ -2 sin $\frac{n\pi x}{3}$ dx + 1/3 $\int_{0}^{3}$ 2 sin $\frac{n\pi x}{3}$ dx

$$= -\,2/3 \int_{-3}^{0} \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx + 2/3 \int_{0}^{3} 2 \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx$$

Misal u = $\frac{n\pi x}{3}$ dx

du = $\frac{n\pi}{3}$

dx = $\frac{3}{n\pi}$

$$= -\,2/3 \int_{-3}^{0} \sin u \;\frac{3}{n\pi} + 2/3 \int_{0}^{3} 2 \cos\; u \;\frac{3}{n\pi}\,du$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0} - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{0}^{3}$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi(0)}{3} - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi(-3)}{3}\right] - \left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi 3}{3} - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi 0}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\cos(-n\pi)\right] - \left[\frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n\pi})\right] = 0$$

$$= \frac{4}{n\pi} - \frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

F(x) $= a_0 + \sum_{n-1}^{\sim} (a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n \sin\frac{n\pi x}{3})$

$= 0 + 0 + 4/n\pi\,(1 - \cos n\pi)\,\sin\frac{n\pi x}{3})$

n =1 F(x) $= 0 + 0 + 4/\pi\,(1 - \cos\pi)\;\sin\frac{\pi x}{3})$

$= 8/\pi\;\sin\;\pi x/3$

n = 2 $\qquad$ = 0 + 0 + 4/2π (1- cos 2π) sin πx/3 = 0

n = 3 $\qquad$ = 0 + 0 + 4/3π (1- cos 3π) sin π3/3 = 8/3π sin πx

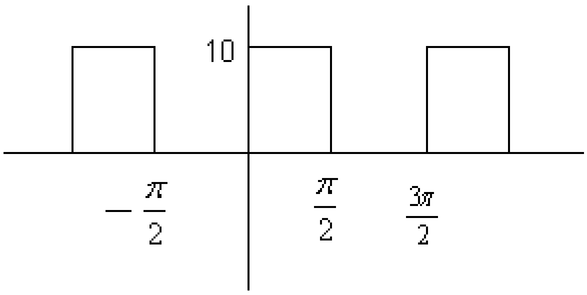
n = 4 $\qquad$ = 0

f(x) = $\frac{8}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{3\pi}\sin \pi x+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{3}\right)$

Respon Lengkap Sumber (Fungsi Pemaksa) Periodik

Dibawah ini diberikan rangkaian RL seri mendapat sumber periody berbentuk segi empat (square wave) kita diminta untuk menghitung respon lengkap. i(t)

Hitung i(t) untuk t>0



$a_0 = 5$

a_n $= 2/T \int_0^T$ f(t) cos nwt dt $= 2/\pi\left[\int_0^{\pi/2} 10\cos 2nt dt\right]$

$= 20/\pi\left[\frac{\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi/2}$ $\qquad = 10/\pi\left[\frac{\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi/2}$

$= 10/\pi[\sin 2n.\pi/2 - \sin 0]$

$a_n \quad = 0$

$b_n \quad = 2/T \int_0^T f(t) \sin nwt\, dt \;=\; 2/\pi \left[\int_0^{\pi/2} 10 \sin 2nt dt \right]$

$= 20/\pi \left[-\frac{\cos 2nt}{2n} \right]_0^{\pi/2} \quad = 10/\pi \left[-\frac{\cos 2nt}{2n} \right]_0^{\pi/2}$

$= 10/n\pi \left[\cos 2n.\pi/2 - \cos 0 \right] = \frac{10}{n\pi} \left[\cos n\pi - 1 \right]$

Untuk n genap $\longrightarrow b_n = -10/n\pi\ (1-1) = 0$

n ganjil $\longrightarrow b_n = -10/n\pi\ (1-1) = 20/n\pi$

$V_s(t) = 5 + \sum_{n=1}^{\sim} \frac{20}{n\pi} \sin 2nt = 5 + \frac{20}{n\pi} \sum_{n=1}^{\sim} \frac{\sin 2nt}{n}$

Ganjil Ganjil

$= 5 + \frac{20}{\pi} \sin 8t + \frac{20}{3\pi} \sin 6t + \frac{20}{5\pi} \sin 10t + \frac{20}{7\pi} \sin 14t + ...$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

DERET FOURIER

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	04	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

DERET FOURIER

Bentuk Kompleks dari Deret Fourier

Dengan mengunakan deret Fourier trigonometris, untuk mendapatkan spektrum frekuensi, terlihat amplitudo setiap komponen bergantung pada kedua konstanta a_n dan b_n, suku sinus dan cosinus memberikan kontribusi kepada amplitudo. Ungkapan yang tepat untuk amplitudo ini adalah $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Mungkin juga kita mendapatkan amplitudo untuk setiap komponen frekuensi dari deret Fourier trigonometris, yaitu dengan mengubah persamaan deret Fourier trigonometris menjadi bentuk cosinus saja ditambah dengan sudut fase tertentu (ingat persamaan A cos x + B sin x = $\sqrt{A^2 + B^2}\cos(x - \tan^{-1}\frac{B}{A})$), amplitudo dan sudut fase adalah fungsi dari f(t)dan n. Bentuk yang paling menyenangkan dan lengkap dari derat Fourier didapat jika sinus dan cosinus dinyatakan sebagai fungsi eksponensial imajiner (ingat identitas Euler fungsi eksponensial imajiner adalah bilangan komples dengan bagian riilnya adalah bentuk cosinus dan imajinernya bentuk sinus).

Sekarang kita ambil bentuk trigonometris dari deret Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\sim}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Identitas Euler : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$\underline{e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta} \quad \pm$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Dengan mensubstitusikan identitas Euler ke persamaan deret Fourier trigonometris diatas, maka persamaan bentuk trigonometris dari deret Fourier dapat ditulis kembali menjadi :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\sim} \left(a_n \frac{e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}}{2j}\right) \qquad (1)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\sim} \left(e^{jn\omega ot} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_o t} \frac{a_n + jb_n}{2}\right) \qquad (2)$$

Kita definisikan sebuah konstanta kompleks c_n :

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \qquad (n = 1,2,3, \ldots) \qquad (3)$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\sim} \left(c_n e^{jn\omega ot} + e^{-jn\omega_o t} c_{-n}\right)$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\sim} c_n\, e^{jn\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\sim} c_{-n}\, e^{-jn\omega_o t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\sim} c_n\, e^{jn\omega_o t} + \sum_{n=-1}^{-\sim} c_n\, e^{jn\omega_o t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} c_n\, e^{jn\omega_o t}$$

Persamaan c_n biasa ditulis :

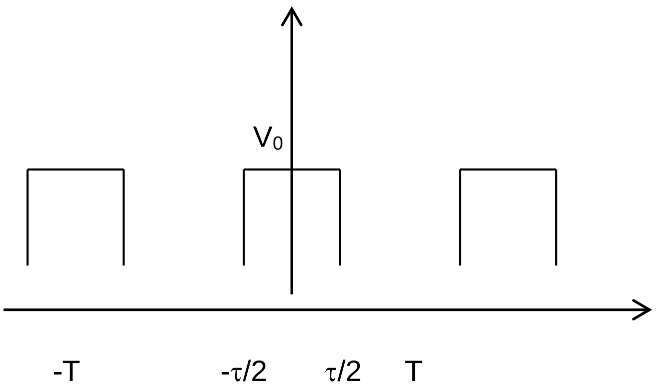
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_o t}\, dt$$

Persamaan deret Fourier eksponensial :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_o t} \, dt$$

Contoh soal : Hitung konstanta/koefisien Fourier kompleks c_n f(t)



Jawab : $c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_o t} dt = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T2}^{T/2} V_0 \, e^{-j2\pi f_o t} dt$

$$= \frac{V_0}{T} \left[\frac{e^{-j2n\pi f_o t}}{-j2n\pi f_o t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \quad = \frac{V_0}{n\pi f_0 T} \left[\frac{e^{jn\pi f_o \tau} - e^{-jn\pi f_o \tau}}{-j2} \right]$$

$$= \frac{V_0 \, \tau}{T} \frac{\sin n\pi f_0 \tau}{n\pi f_0 \tau}$$ n = ±1, ±2, ±3, . . .

Untuk n = 0

$$c_o = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \, dt = \frac{V_0 \, \tau}{T}$$

DERET FOURIER SINYAL PERIODIK KONTINU

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (ak \cos k w_0 t + bk \sin k\, w_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (ak \cos 2\pi\; k f_0 t + bk \sin k\, 2\pi\; f_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos 2\pi\; f_0 t\; dt.$$

$$bk = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin 2\pi\; f_0 t\; dt$$

dalam bentuk eksponensial kompleks

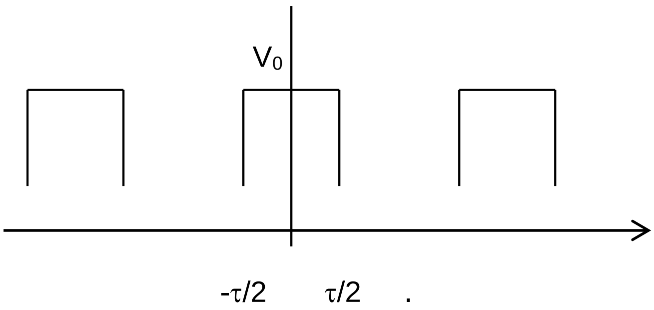
$$e^{j\theta} = \cos\theta + J\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = coa\theta - j\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Exercise



Ck $\quad = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kf0t}dt$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j2\pi kfot}dt = \frac{A}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi kfot}dt\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-j2\pi kfot}}{-j2\pi kfo}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{T\pi kfo}\left[\frac{e^{-j2\pi kfot}}{-j_2}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

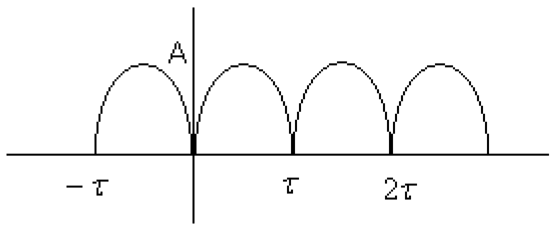
$$= \frac{A}{T\pi kf_o}\left[\frac{e^{-j2\pi kfot/2} - e^{-j2\pi kfot/2}}{-j_2}\right]$$

$$= \frac{A}{T\pi kf_o}\left[\frac{e^{-j\pi kfot} - e^{-j\pi kfot}}{-j}\right]$$

$$= \frac{A}{T\pi kf_o}\left[\frac{e^{-j\pi kfot} - e^{-j\pi kfot}}{j_2}\right]$$

$$= \frac{A}{T\pi kf_o}\left[\sin \pi kf_o t\right]$$

$$= \frac{At}{T}\left[\frac{\sin \pi kf_o t}{\pi kf_o t}\right]$$



2.

x(t) = A sin $\pi/_T\, t = A\sin \pi/_T\, t$ T = T f_o = $\frac{1}{T}$

Ck $= \frac{1}{T}\int_0^T (A\sin \pi t/t)e^{-j2\pi kf_o t}\,dt$

$$= \frac{A}{T}\int_0^T \left[A\sin t/t\right]e^{-j2\pi kt/t}\,dt$$

$$= \frac{A}{T}\int_0^T \left[\frac{e^{j\pi t/t} - e^{-j\pi t/t}}{j_2}\right]e^{-j2\pi kt/t}\,dt$$

$$= \frac{A}{j_2 T}\int_0^T \left[\frac{e^{j\pi t/t(1-2k)} - e^{-j\pi t/t(1+2k)}}{}\right]dt$$

$$= \frac{A}{j_2 T}\int_0^T \left[\frac{e^{j\pi t/t(1-2k)}}{j\pi(1-2k)/t} - \frac{e^{-j\pi t/t(1+2k)}}{-j\pi(1+2k)/t}\right]_0^T dt$$

$$= \frac{A}{j_2}\left[\frac{e^{j\pi(1-2k)}}{j\pi(1-2k)} + \frac{e^{-j\pi(1+2k)}}{-j\pi(1+2k)}\right] - 0$$

$$= \frac{A}{j_2}\left[\frac{e^{j\pi(1-2k)}}{j\pi(1-2k)} + \frac{e^{-j\pi(1+2k)}}{-j\pi(1+2k)}\right] - 0$$

$$= \frac{A}{j_2}\left[\frac{e^{j\pi}.e^{-j2k\pi}}{j\pi(1-2k)} + \frac{e^{-j\pi}.e^{-j2k\pi}}{-j\pi(1+2k)}\right]$$

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

$$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\sin\pi = -1$$

$$e^{-j2k\pi} = \cos 2k\pi - j\sin 2k\pi = -1$$

$$= \frac{-1}{j\pi(1-2k)} - \frac{1}{j\pi(1+2k)} = \frac{-jk(1+2k) - j\pi(1-2k)}{-\pi^2(1-4k^2)} = \frac{-j2\pi}{-\pi^2(1-4k^2)}$$

$$= \frac{-1}{j\pi(1-2k)} + \frac{1}{j\pi(1+2k)} = \frac{jk(1+2k)+j\pi(1-2k)}{-\pi^2(1-4k^2)} = \frac{j2\pi}{-\pi^2(1-4k^2)}$$

$$= \frac{A}{j_2}\left[\frac{j4}{\pi(1-4k^2)}\right] = \frac{2A}{\pi(1-4k^2)}$$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

TRANSFORMASI LAPLACE

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	05	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

TRANSFORMASI LAPLACE

Pendahuluan

• Diusulkan oleh: Piere Simon Marquis De Laplace (ahli matematik Prancis)

• Hukum dan prosedur operasional metode ini diawali dengan oleh *definite integral* yang disebut sebagai *transformasion integral* sehinga prosedur perhitungan menjadi lebih sederhana dan lebih singkat

Definisi Transformasi Laplace

Tinjau fungsi f(t) yang kontinyu dan differensiable, maka transformasi Laplace fungsi f(t), ditulis : £ f (t)

Dengan formula :

$$\boxed{\text{£ } f(t) = \int f(t) \cdot e^{-st}\, dt}$$

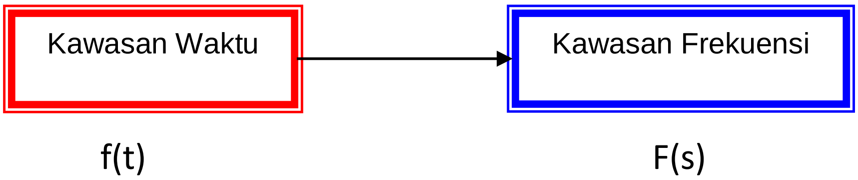
Dengan

e = 2,71828

s : frekuensi kompleks

S = σ + j ω

Tranformasi Laplace ini, memindahkan suatu fungsi f(t) dari kawasan waktu ke kawasan frekuensi.



Tabel Transformasi Laplace

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n\, u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\, u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$u(t)$ Cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$u(t)$ Sin bt	$\frac{\omega_0}{s^2+b^2}$

Sifat – sifat Transformasi Laplace

SIFAT 1

$$\boxed{\text{£ } [f_1(t) + f_2(t)] = \text{£ } f_1(t) + c \text{ £ } f_2(t)}$$

SIFAT 2

$$\boxed{\text{£ } [c\, f(t)] = c \text{ £ } f(t)}$$

c = Konstanta

SIFAT 3

$$\text{£ } \varepsilon^{-bt} f(t) = F(s + b)$$

Untuk £ f(t) = F (s)

SIFAT 4

SIFAT DIFFERENSIASI

Bila £ f (t) = F (s)

Maka : $\Rightarrow$ £ $\dfrac{df(t)}{}$ = s F(s) - f (0)

$$f(0) = f(t) \Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \pounds \frac{d^2 f(t)}{\quad} = s^2 F(s) - s\ f(0) - f'(0)$$

$$\boxed{\pounds \frac{d^n f(t)}{\quad} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) .. - f^{(n-1)}(0)}$$

SIFAT 5

SIFAT INTEGRASI

Bila £ f(t) = F (s)

Maka Transf. Laplace untuk :

1. Integral terbatas $\pounds \left[\int_o^t f(t)\, dt \right] = \boxed{\frac{F(s)}{\quad}}$

2. Integral tak terbatas

$$\boxed{\pounds \left[\int f(t)\, dt \right] = \frac{F(s)}{\quad} + \frac{f(o)}{\quad}}$$

SIFAT 6

PERKALIAN DENGAN t

Bila £ f(t) = F (s)

Maka $\quad £ [\, t\, f(t)\,] = \frac{-\,d\,F(s)}{}$

$$£ [\, t^2 f(t)\,] = (-1)^2 \frac{d^2\ F(s)}{}$$

$$\boxed{£ [\, t^n f(t)\,] = (-1)^n \frac{d^n\ F(s)}{}}$$

SIFAT 7

PEMBAGIAN DENGAN t

Bila £ f(t) = F (s)

$$\boxed{\text{Maka} \quad £ \left(\frac{f(t)}{} \right) = \int_0^{\sim} F(s)\, ds}$$

SIFAT 8

SIFAT PERGESERAN

Bila £ f(t) = F(s)

maka:

$$\boxed{£ \;\; f(t - to)\, u(t - to) = \varepsilon^{-sto} F(s)}$$

- Bentuk u (t - to) ⟶ tidak dapat diubah

- Yang dapat diubah fungsinya

Contoh : £ (t -2) u (t - 2) = ε^{-2s} £ (t)

$$= \varepsilon^{-2s} \quad \frac{1}{\quad}$$

Contoh : £ t^2 u (t - 2) = ?

£ [t]^2 u (t - 2) =

£ [(t - 2) + 2]^2 u (t - 2) =

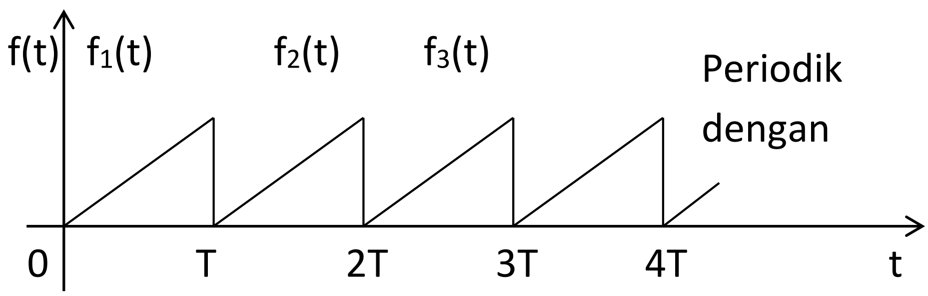
£ $[(t - 2)^2 + 4(t - 2) + 4]\, u(t - 2) =$

ε^{-2s} £ $t^2 + 4\, \varepsilon^{-2s}$ £ $t + \varepsilon^{-2s}$ £$4 =$

$$\varepsilon^{-2s} \left[\frac{2}{\quad} + \frac{4\,.\,1}{\quad} + \frac{4}{\quad} \right]$$

SIFAT 9

FUNGSI PERIODIK



f (t) $= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

£ f(t) = £ $f_1(t)$ + £ $f_2(t) + \ldots\ldots\ldots$

$$\boxed{\text{£ } f(t) = \frac{\text{£ } f_1(t)}{-}}$$

SIFAT 10

SIFAT CONVOLUSI INTEGRAL

Bila $F(s) = F_1(s) \,.\, F_2(s)$

maka $£^{-1} F(s) = £^{-1} [F_1(s) \,.\, F^2(s)]$

$\neq £^{-1} F_1(s) \,.\, £^{-1} F_2(s)$

$\Rightarrow f(t) \neq f_1(t) \,.\, f_2(t)$

agar tanda $\neq$ dapat diganti menjadi = maka :

$\Rightarrow f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$\uparrow$

convolt

formula :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \,.\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_0^t f_2(\tau) \,.\, f_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_2(t) \,.\, f_1(t) \qquad \text{comutative}$$

Contoh :

$$£^{-1} \frac{1}{\quad} \qquad = \quad £^{-1} \left(\frac{1}{\quad} \right) \left(\frac{1}{\quad} \right)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} \longrightarrow f_1(t) = \varepsilon^{-t}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s+2} \longrightarrow f_2(t) = \varepsilon^{-2t}$$

$$F(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \varepsilon^{-t} * \varepsilon^{-2t}$$

$$= \int_0^t \varepsilon^{-\tau}\, \varepsilon^{-2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \varepsilon^{-2t} \int_0^t \varepsilon^{\tau}\, d\tau$$

$$= \varepsilon^{-2t}\ \varepsilon^{\tau} \Big|_0^t$$

$$= \varepsilon^{-2t} [\varepsilon^{t} - 1]$$

$$f(t) = \varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}$$

Sifat	$x(t)$	$X(s)$
Kelinearan	$a\,x(t) + b\,y(t)$	$a\,X(s) + b\,Y(s)$
Penskalaan	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$
Geseran waktu	$x(t-a)$	$e^{-sa}\,X(s)$
Geseran frekuensi	$e^{-at}\,x(t)$	$X(s+a)$
Konvolusi waktu	$x(t) * y(t)$	$X(s)\,Y(s)$

Sifat	$x(t)$	$X(s)$
Konvolusi frekuensi (modulasi)	$x(t)\,y(t)$	$\frac{1}{2\pi j} X(s) * Y(s)$
Diferensiasi frekuensi	$(-t)^n\,x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} X(s)$
Diferensiasi waktu	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} x_{(0-)}^{(k)}$
		$s^n X(s)$ Untuk TL dua sisi

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

TRANSFORMASI LAPLACE-2

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	06	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi Laplace dari Fungsi-fungsi Sederhana

1. £ δ (t)

£ ε^{-at} $= \int.\delta\ (t)\ e^{-st}\ dt$

$= e^{-s0} = 1$

$\boxed{£\ \delta\ (t) = 1}$

2. **£ ε^{-at}** untuk a : - Riel

- Imaginer

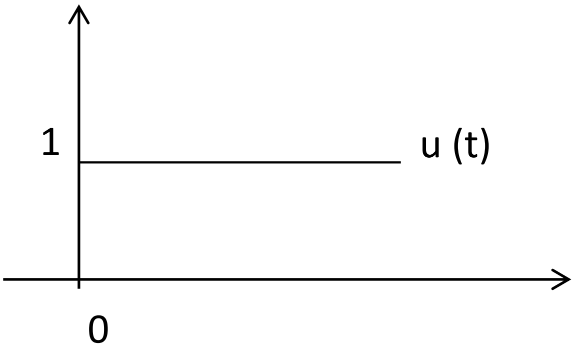
- Kompleks

£ ε^{-at} $= \int e^{-at}.\ e^{-st}\ dt$

$= \int e^{-(s+a)t}\ dt$

$$\boxed{£\ \varepsilon^{-at} = \frac{1}{s+a}}$$

3. Fungsi unit step



$$u(t) = \begin{cases} 1 \; ; \; t \geq 0 \\ 0 \; ; \; t < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\pounds\, u(t) \;=\; \pounds\,(1) \quad \frac{1}{\;\;}}$$

4. Sin at

$$\text{Sin at} = \frac{1}{\quad} \left[\varepsilon^{jat} - \varepsilon^{-jat}\right]$$

$$£\ \text{Sin at} = £ \frac{1}{\quad} \left[\varepsilon^{jat} - \varepsilon^{-jat}\right]$$

$$= \frac{1}{\quad} \left[£\ \varepsilon^{jat} - \varepsilon^{-jat}\right]$$

$$= \frac{1}{\quad}\left(\frac{1}{\quad} - \frac{1}{\quad}\right)$$

$$£\ \text{Sin at} = \frac{a}{s^{2} + a^{2}}$$

$$£\ \text{Cos at} = \frac{s}{s^{2} + a^{2}}$$

5. Hiperbolikus

$$\text{Sinh at} = {}^{1}/_{2} \left[\varepsilon^{jat} - \varepsilon^{-jat}\right]$$

$$\text{Cosh at} = {}^{1}/_{2} \left[\varepsilon^{jat} - \varepsilon^{-jat}\right]$$

$$£ \text{ Sinh } at = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$£ \text{ Cosh } at = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

6. Sinusoida Teredam

$$£ \ \varepsilon^{-bt} \ . \text{ Sin } at = \frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$$

$$£ \ \varepsilon^{-bt} \ .\text{Cos } at = \frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$$

7. t pangkat positif

$$£ \ t^n = \frac{n\,!}{s^{n+1}}$$ n : 0,1,2, ……….

Pecahan parsial

Jika X(s) berbentuk pecahan parsial yang pembilang dan penyebutnya berbentuk polynomial.

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Derajat *P(s)* < derajat *Q(s)*

$$X(s) = \frac{P(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+p_1)} + \frac{A_2}{(s+p_2)} \ldots \frac{A_n}{(s+p_n)}$$

$$A_k = \lim_{s \to -p_k} (s+p_k).X(s)$$

$$k = 1,2,\ldots n$$

x (t) menjadi :

$$x(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \ldots + A_n e^{-p_n t}$$

$$X(s) = \frac{P(s)}{(s+p_1)^r (s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

$$X(s) = \frac{A_{11}}{(s+p_1)} + \frac{A_{12}}{(s+p_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{A_2}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(s+p_n)}$$

$$A_k = \lim_{s \to -p_k} (s+p_k).X(s)$$

$$A_{kl} = \frac{1}{(r-l)!} \frac{d^{r-l}}{ds^{r-l}} \left[\lim_{s \to -p_k} (s+p_k)^r .X(s) \right]_{s=-p_k}$$

Contoh :

$$X(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = \left.\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = \frac{3}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} = -2$$

$$A_3 = \left.\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

$$X(s) = \frac{3/2}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$x(t) = \tfrac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \tfrac{1}{2}e^{-3t}$$
$$t > 0$$

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2}$$

$$A_1 = \left.\frac{s}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$A_{11} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left.\frac{s}{s+1}\right|_{s=-2} = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = 1$$

$$A_{12} = \frac{1}{(2-2)!}\left.\frac{s}{s+1}\right|_{s=-2} = 2$$

$$X(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$x(t) = -e^{-t} + e^{-2t} + 2te^{-2t}$$
$$t > 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$X(s) = \frac{A_1(s^2 + 2s + 2) + s(A_2 s + A_3)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$X(s) = \frac{(A_1 + A_2)s^2 + (2A_1 + A_3)s + 2A_1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = -1$$

$$X(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+1)^2+1^2}$$

$$X(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t}Cos(t) - \tfrac{1}{2}e^{-t}Sin(t)$$

$$t > 0$$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

APLIKASI TRANSFORMASI LAPLACE

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	07	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Liner merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

APLIKASI TRANSFORMASI LAPLACE

Rangkaian Pengganti untuk Induktor dan Kapasitor

Untuk perhitungan rangkaian linier menggunakan transformasi Laplace biasanya induktor dan kapasitor langsung dibuat rangkaian penggantinya.

Rangkaian Pengganti untuk Induktor dalam Domain s

Persamaan untuk Induktor (dalam diferensial) :

$$v = L\frac{di}{dt}$$

jika persamaan tersebut di transform Laplace akan menjadi :

$$\boxed{V(s) = L[sI(s) - i(0)]}$$

$$= sL\, I(s) - Li(0)$$

Persamaan untuk Induktor (dalam integral) :

$$i = \frac{1}{L}\int_0^{\sim} v(t)d(t) + i(0)$$

jika persamaan tersebut di transform Laplace akan menjadi :

$$I(s) = \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + \frac{i(0)}{s}$$

$$\boxed{I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0)}{s}}$$

Rangkaian Pengganti untuk Kapasitor dalam Domain s

Persamaan untuk Kapasitor (dalam integral) :

$$v = \frac{1}{c}\int_0^{\sim} i(t)d(t) + v(0)$$

jika persamaan tersebut di transform Laplace akan menjadi :

$$V(s) = \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{v(0)}{s}$$

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

Persamaan untuk Kapasitor (dalam diferensial) :

$$i = c\frac{dv}{dt}$$

jika persamaan tersebut di transform Laplace akan menjadi :

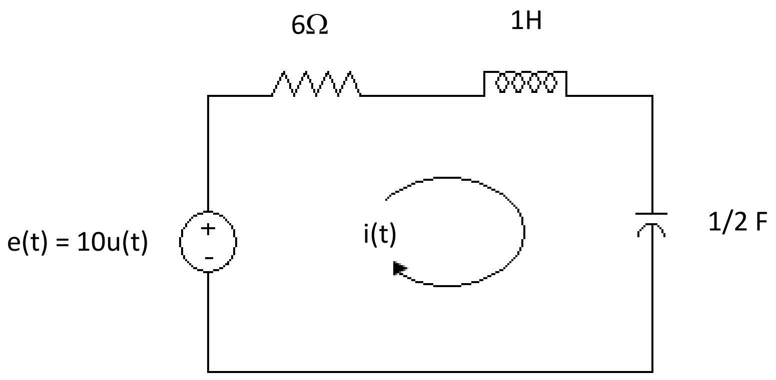
$$\boxed{I(s) = C[sV(s) - v(0)]}$$

$$= sC\,V(s) - Cv(0)$$

$$
\begin{array}{llll}
V_R(t) & i(t).R & I(s).R & \\
V_L(t) & L\dfrac{di(t)}{dt} & SLI(s) & jika \quad i_0 = 0 \\
V_C(t) & \dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)dt & \dfrac{I}{SC}I(s) & jika \quad v_0 = 0
\end{array}
$$

Latihan :

No.1



Berapa nilai i(t) jika rangkaian belum dipakai ?

Jawab:

$$6i(t)+1.\frac{di(t)}{dt}+2\int_0^t i(t)dt=10u(t)$$

$$I(s)\left(6+s+\frac{2}{s}\right)=\frac{10}{s}$$

$$I(s)=\frac{10}{s\left(6+s+\frac{2}{s}\right)}$$

$$I(s)=\frac{10}{\left(s^2+6s+2\right)}$$

$$I(s)=\frac{10}{\left(s^2+6s+9\right)-7}$$

$$I(s)=\frac{10}{(s+3)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}$$

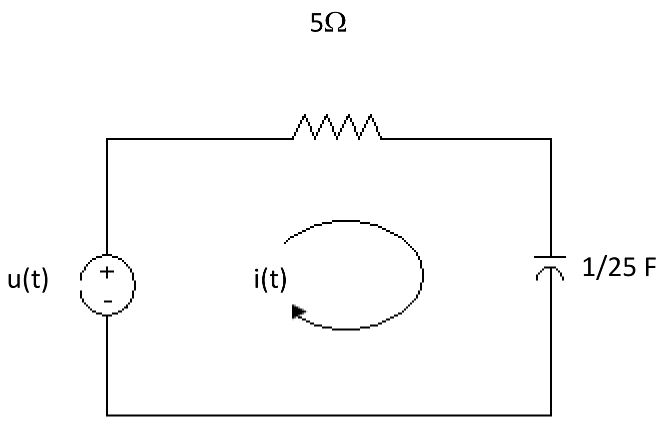
$$I(s)=\frac{10\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}{(s+3)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}$$

$$I(s)=\frac{\frac{10}{\sqrt{7}}\sqrt{7}}{(s+3)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}$$

$$i(t)=\frac{10}{\sqrt{7}}e^{-3t}\sinh\sqrt{7}t$$

No.2

Berapakah nilai I (t) jika v(0) = 10 volt dan i(0) = 0



$$4I(s)+\frac{16}{s}I(s)+\frac{9}{s}=\frac{1}{s}$$

$$I(s)\left(4+\frac{16}{s}\right)=-\frac{8}{s}$$

$$I(s)(4s+16)=-8$$

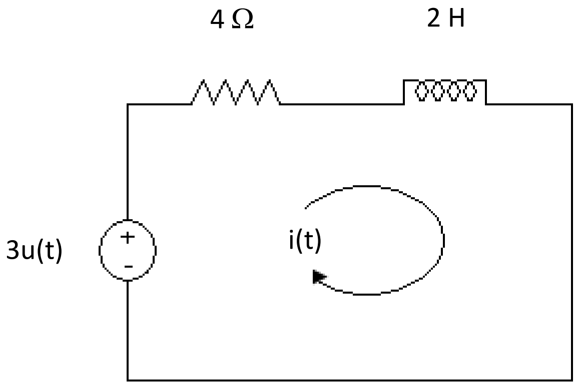
$$I(s)=\frac{-8}{4s+16}$$

$$I(s)=\frac{-8}{4(s+4)}$$

$$I(s)=\frac{-2}{s+4}$$

$$i(t)=-2e^{-4t}$$

No. 3



Berapakah nilai i(t) jika nilai i(0) = 5A?

Jawab :

$$2\frac{di}{dt}+4i(t)=3u(t)$$

$$2(sI(s)-i(0))+4I(s)=\frac{3}{s}$$

$$2sI(s)-10+4I(s)=\frac{3}{s}$$

$$I(s)(2s+4)=\frac{3}{s}+10$$

$$I(s)(2s+4)=\frac{3+10s}{s}$$

$$I(s)=\frac{10s+3}{s(2s+4)}$$

$$I(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{10s+3}{s(s+2)}\right)$$

$$I(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{10s+3}{s(s+2)}\right)$$

$$I(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \frac{I(s)}{s} = \left.\frac{10s+3}{(s+2)}\right|_{s=0}$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{I(s)}{s+2} = \left.\frac{10s+3}{s}\right|_{s=-2}$$

$$B = \frac{17}{2}$$

$$I(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{3/2}{s} + \frac{17/2}{s+2}\right)$$

$$i(t) = \frac{1}{2}\left(3/2u(t) + 17/2e^{-3t}u(t)\right)$$

$$i(t) = 3/4u(t) + 17/4e^{-3t}u(t)$$

TABEL TRANSFORMASI LAPLACE

Fungsi waktu $e(t)$	Transformasi Laplace $E(s)$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\dfrac{t^2}{2}$	$\dfrac{1}{s^3}$
t^{k-1}	$\dfrac{(k-1)!}{s^k}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$t^k e^{-at}$	$\dfrac{(k-1)!}{(s+a)^k}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$t-\dfrac{1-e^{-at}}{a}$	$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+a^2}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$t \sin bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$

Fungsi Waktu $e(t)$	Transformasi Laplace $E(s)$
$t \cos bt$	$\dfrac{a^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$
$1 - e^{-at}\left(\cos bt + \dfrac{a}{b} \sin bt\right)$	$\dfrac{a^2 + b^2}{s[(s + a)^2 + b^2]}$

$$A = 1 - e^{-aT}\left[\cos bT + \left(\frac{a}{b}\right) \sin bT\right]$$

$$B = e^{-2aT} + e^{-aT}\left[\left(\frac{a}{b}\right) \sin bT - \cos bT\right]$$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

TRANSFORMASI-Z

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	08	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

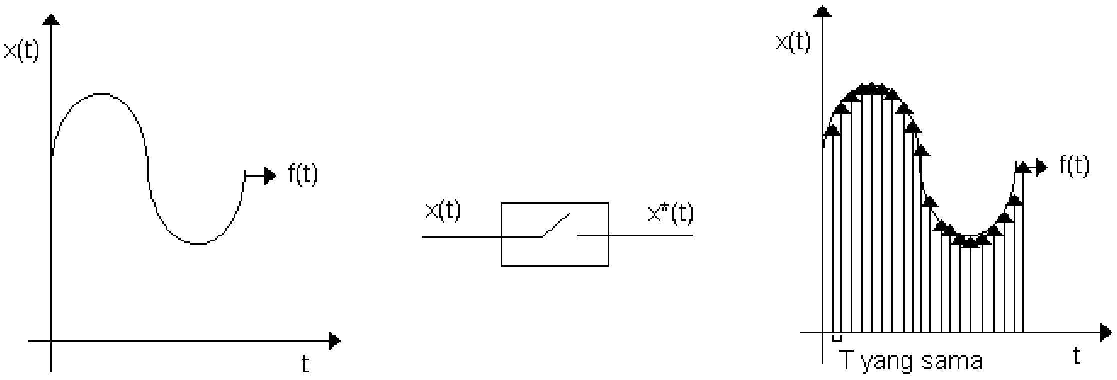
Sistem Linier merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linier memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

TRANSFORMASI-Z

Proses Pencuplikan (The Sampling Process)



Input : Sinyal sebagai f waktu x(t) = f(t)

Output : Sinyal diskrit

Merupakan sederetan pulsa-pulsa yang memiliki amplitudo sebesar harga sinyal semula pada saat pencuplikan terjadi.

f^* (t) $= f_o\, S(t) + f(T)\, S(t-T) + f\,(2T)\, S(t-2T) + \ldots. +$

$= f(n\,T)\, S(t-nT)$

$= \sum_{n=0}^{\sim} f(nT)\, S\,(t-\pi\, T)$

Transformasi Laplace memberikan :

$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\sim} f(nT)e^{-nTs}$

Untuk menyederhanakan fungsi tersebut dimisalkan

E^{TS} = Z atau S = $\frac{1}{T}$ ln z

Maka hasil transformasi Laplace dari sinyal tercuplik dapat ditulis sebagai berikut :

$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\sim} f(nT)Z^{-n}$

Ini disebut sebagai transformasi Z dari fungsi x(t) ditulis Z $\{f(t)\}$ = F(Z) = F^*(S)

Sifat- sifat Transformasi Z

1. Sifat Linear : Z $\{(fct) \pm 9(t)\}$

   Z $\{(fct) \pm Z(9(t)\}$

   F $\{(Z) \pm 6(Z)\}$

2. Perkalian dan Konstanta

   Z $\{kfct)\}$ = K Z $\{(fct)\}$

   = K F (Z)

3. Pergeseran waktu

   Z_1 Z $\{fct - PT)\}$ = Z^{-PT} Z $\{fct)\}$

   = Z^{-P} F(Z)

4. Perkalian dengan e^{-AT}

   Z $\{e^{-AT} fct)\}$ = F (Z.e^{at})

   Dimana : Z $\{(fct)\}$ = F (Z)

5. Teori Harga Mulia

   Bila : Z $\{(fct)\}$= F (Z)

   Maka : f(0) = lim F(Z)

   Z $\longrightarrow$ ~

6. Teori Harga Akhir

Bila : Z $\{fct)\}$ = F(Z)

Maka : lim f(t) = lim (1-Z^{-1}) F(Z)

t $\rightarrow$ ~ Z $\rightarrow$ 1

Transformasi z untuk fungsi sederhana

1. FUNGSI SATUAN LANGKAH UNIT STEP. U(n)

Z [x(n] = X (z)

$$= \sum_{n=0} x(n)\, z^{-n}$$

$$Z\,[u(n)\,] = \sum_{n=0} u(n)\, z^{-n}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{Z\,[u\,(n)\,] = \frac{z}{z-1}}$$

2. FUNGSI EXPONENSIAL

x (n) = 0 n < 0

= ε^{-an} n $\geq$ 0

$$Z\left(\varepsilon^{-an}\right) = \sum_{n=0} \varepsilon^{-an}\, z^{-n}$$

$$= 1 + \varepsilon^{-a}\, z^{-1} + \varepsilon^{--2a} z^{-2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$Z(\varepsilon^{-an}) = \frac{z}{z - \varepsilon^{-a}}$$

3. FUNGSI SINUSOIDA :

x (n) = 0 ; n < 0

x (n) = Sin an ; n ≥ 0

$$= \frac{1}{2j}\left[\varepsilon\ j^{an} - \varepsilon^{-jan}\right]$$

$$Z\ [\sin an] = \frac{1}{2j} Z\left[\varepsilon^{jan} - \varepsilon^{-jan}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - \varepsilon^{jan}} - \frac{z}{z - \varepsilon^{jan}}\right]$$

$$Z[\text{Sin an}] = \frac{Z\,Sin\,a}{Z^2 - 2Z\,Cos\,a + 1}$$

Z [cos an] = ½ Z [ε^{jan} + ε^{-jan}]

$$= ½\left[\frac{Z}{Z - \varepsilon^{jan}} + \frac{Z}{Z - \varepsilon^{-jan}}\right]$$

$$Z[\text{Cos an}] = \frac{Z(Z - Cos\,a)}{Z^2 - 2Z\,Cos\,a + 1}$$

4. FUNGSI n ε^{-an}

$Z(n\,\varepsilon^{-an}) = \sum \left(n\,\varepsilon^{-an}\right) Z^{-n}$

$= 0 + \varepsilon^{-an} z^{-1} + 2\varepsilon^{-2a} z^{-2} + 3\varepsilon^{-3a} z^{-3} + \ldots..$

$= \varepsilon^{-an}[z^{-1} + 2z^{-2}\,\varepsilon^{-a} + 3z^{-3}\varepsilon^{-2a} + \ldots\ldots.]$

$$\boxed{Z[n\ \varepsilon^{-an}] = \frac{z\varepsilon^{-a}}{[z-\varepsilon^{-a}]^2}}$$

5. $x(n) = n$

$Z(n) = \sum_{n=0} nz^{-n}$

$= 0 + Z^{-1} + 2Z^{-2} + 3Z^{-3} + \ldots.$

$= Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + \ldots \qquad = \frac{.Z^{-1}}{1-Z^{-1}}$

$+ Z^{-2} + Z^{-3} + \ldots \qquad = \frac{.Z^{-2}}{1-Z^{-1}}$

$+ Z^{-3} + \ldots \qquad = \frac{.Z^{-3}}{1-Z^{-1}}$

$Z(n) = Z^{-1}(1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \ldots)$

$= \frac{Z^{-1}}{(1-Z^{-1})} \cdot \frac{1}{1-Z^{-1}}$

$= \frac{}{Z-1} \cdot \frac{Z}{Z-1}$

$= \frac{.Z}{(Z-1)^2}$

$$\boxed{Z(n) = \frac{Z}{(Z-1)^2}}$$

6. $x(n) = n^2$

$Z(n^2) = \Sigma\, n^2 Z^{-n}$

$= Z^{-1} + 4Z^{-2} + 9Z^{-3} + 16Z^{-4} + \ldots$

$= Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} + \ldots$

$+ 3Z^{-2} + 3Z^{-3} + 3Z^{-4} + \ldots$

$+ 5Z^{-3} + 5Z^{-4} + \ldots$

$+ 7Z^{-4} + \ldots$

$$= \frac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}} + \frac{3Z^{-2}}{1-Z^{-1}} + \frac{5Z^{-3}}{1-Z^{-1}} + \ldots.$$

$$= \frac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}}\left[1 + 3Z^{-1} + 5Z^{-2} + 7Z^{-3} + \ldots.\right]$$

$\Rightarrow 1 + 3Z^{-1} + 5Z^{-2} + 7Z^{-3} + \ldots$

$1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + \ldots \quad = \dfrac{1}{1-Z^{-1}}$

$+2Z^{-1} + 2Z^{-2} + 2Z^{-3} + \ldots \quad = \dfrac{2Z^{-1}}{1-Z^{-1}}$

$+ 2Z^{-2} + 2Z^{-3} + \ldots \quad = \dfrac{2Z^{-2}}{1-Z^{-1}}$

$+ 2Z^{-3} + \ldots \quad = \dfrac{2Z^{-3}}{1-Z^{-1}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-Z^{-1}}\left[1 + 2Z^{-1} + 2Z^{-2} + 2Z^{-3} + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-Z^{-1}}\left[1 + \frac{2Z^{-1}}{1-Z^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1 - Z^{-1} + 2Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}$$

$$Z\,(n^2) = \frac{Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \cdot \frac{1 + Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}$$

$$= \frac{Z^{-1}\,(1 + Z^{-1})}{(1 - Z^{-1})^3}$$

$$\boxed{Z(n^2) = \frac{Z\,(1 + Z)}{(Z - 1)^3}}$$

PERHATIKAN :

$Z^{-1} + 2Z^{-2}\,\varepsilon^{-a} + 3Z^{-3}\varepsilon^{-2a} + \ldots.$

FUNGSI DI ATAS DIPECAH MENJADI :

$$Z^{-1} + Z^{-2}\varepsilon^{-a} + Z^{-3}\varepsilon^{-2a} + Z^{-4}\varepsilon^{-3a} + \ldots. = \frac{Z - 1}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-a}}$$

$$+ Z^{-2}\varepsilon^{-a} + Z^{-3}\varepsilon^{-2a} + Z^{-4}\varepsilon^{-3a} + \ldots. = \frac{Z^{-2}\varepsilon^{-a}}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-a}}$$

$$+ Z^{-3}\varepsilon^{-2a} + Z^{-4}\varepsilon^{-3a} + \ldots. = \frac{Z^{-3}\varepsilon^{-a}}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-a}}$$

$$\therefore \quad \frac{Z^{-1}}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-a}} + \frac{Z^{-2}\,\varepsilon^{-a}}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-a}} + \frac{Z^{-3}\,\varepsilon^{-2a}}{1 - Z^{-1}\varepsilon^{-2a}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-Z^{-1}\varepsilon^{-a}}\left[Z^{-1}+Z^{-2}\varepsilon^{-a}+Z^{-3}\varepsilon^{-2a}+\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{1-Z^{-1}\varepsilon^{-a}} \cdot \frac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}\varepsilon^{-a}}$$

$$= \frac{Z}{(Z-\varepsilon^{-a})^{2}}$$

7. x(n) = ε^{-bn} Sin an

$$Z[\varepsilon^{-bn}\text{Sin an}] = \sum_{n=0} \varepsilon^{-bn} \, . \, \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon^{ja} - \varepsilon^{-ja}\right] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0} \varepsilon^{-b} \, . \, \tfrac{1}{2} j\left[\varepsilon^{-(b-ja)} - \varepsilon^{-(b+ja)}\right] z^{-n}$$

$$= Z\left[\tfrac{1}{2} j\left\{\varepsilon^{-(b-ja)t} - \varepsilon^{-(b+ja)t}\right\}\right] Z^{-}$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{Z}{Z-\varepsilon^{-(b-ja)T}} - \frac{Z}{Z-\varepsilon^{-(b+ja)T}}\right]$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{Z^{2} - Z\varepsilon^{-(b+ja)T} - Z^{2} + Z\varepsilon^{-(b-ha)T}}{Z^{2} - Z(\varepsilon^{-(b-ja)T} + \varepsilon^{-(b+ja)T}) + \varepsilon^{-2bT}}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{Z\varepsilon^{-bT}[\varepsilon^{jaT} - \varepsilon^{-jaT}]}{Z^{2} - 2Z\varepsilon^{-bT} . \tfrac{1}{2}[\varepsilon^{jaT} - \varepsilon^{-jaT}] + \varepsilon^{-2bT}}$$

$$\boxed{Z[\varepsilon^{-bn}\text{ Sin an}] = \frac{Z\varepsilon^{-b}\,Sin\,a}{Z^{2} - 2Z\varepsilon^{-b}.Cos\ a + \varepsilon^{-2b}}}$$

$$\boxed{Z[\varepsilon^{-bn}\text{ Cos an}] = \frac{Z^{2} - Z\varepsilon^{-b}\,Cos\,a}{Z^{2} - 2Z\varepsilon^{-b}.Cos\ a + \varepsilon^{-2b}}}$$

8. x (n) = a^{n}

$Z(a^n) = \Sigma a^n Z^{-n}$

$= 1 + aZ^{-1} + a^2Z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots$

$$= \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}$$

$$\boxed{Z[a^n] = \frac{Z}{Z-a}}$$

9. $x(n) = a^n \cos \pi n$

$Z[a^n \cos \pi n] = \Sigma a^n \cos \pi n \,.\, z^{-n}$

$= 1 + a(-1)z^{-1} + a^2(1)z^{-2} + a^3(-1)z^{-3} + \ldots$

$$= \frac{1}{1+aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z+a}$$

$$\boxed{Z[a^n \cos \pi n] = \frac{z}{z+a}}$$

TABEL TRANSFORMASI LAPLACE DAN TRASFORMASI-Z

Fungsi waktu $e(t)$	Transformasi Laplace $E(s)$	Transformasi-z $E(z)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
t^{k-1}	$\frac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim_{a\to 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$t^k e^{-at}$	$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})^2}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z\{[1-e^{-aT}-aTe^{-aT}]z+[e^{-2aT}+(aT-1)e^{-aT}]\}}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+a^2}$	$\frac{z \sin bT}{z^2-2z\cos bT+1}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$	

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MERCU BUANA

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

TRANSFORMASI-Z (lanjutan)

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	09	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linier merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linier memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

TRANSFORMASI-Z

(lanjutan)

Soal –soal tranformasi z

1. F(S) = $\frac{S}{(S+1)^2(S+2)}$

Partial Fraction Expansion :

$$\frac{S}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{A_1}{S+1} + \frac{A_2}{S+2} + \frac{A_3}{(S+1)^2}$$

S = A_1 (s + 1)(s + 2) + A_2(s + 1)^2 + A_3 (s + 2)

S = A_1 (s^2 + 3s + 2)+ A_2(s^2 + 2s + 1)+ A_3 (s + 2)

S = (A_1 + A_2)s^2 + (3A_1 +2A_2 +A_3)s +(2A_1 + A_2 + 2A_3)

Jawaban

$$\frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+2} - \frac{1}{(S+1)^2}$$

$$2\left(\frac{Z}{Z-e^{E}}\right) - 2\left(\frac{Z}{Z-e^{-2t}}\right) - \left(\frac{TZe^{-t}}{(Z-e^{-t})^2}\right)$$

Note : $\frac{1}{S+a} = \left(\frac{Z}{Z-e^{-at}}\right)$ $\qquad$ $\frac{1}{(S+a)^2} = \left(\frac{TZe^{-at}}{(Z-e^{-at})^2}\right)$

2. Diferensial Deret

$$\frac{z}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}$$

$$\frac{d}{da}\frac{z}{z-a}=\frac{d}{dz}z(z-a)^{-1}=-1z(z-a)^{-2}(-1)$$

$$\frac{d}{da}\frac{z}{z-a}=\frac{z}{(z-a)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}na^{n-1}z^{-n}\leftrightarrow x[n]=na^{n-1}$$

$$\frac{d}{da}=\frac{z}{(z-a)^2}=\frac{2z}{(z-a)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a^{n-2}z^{-n}\leftrightarrow x[n]=n(n-1)a^{n-2}$$

Cari Transformasi Z dari: *x[n] = n*^{2}

$$\frac{2z}{(z-a)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a^{n-2}z^{-n}$$

$$\frac{2z}{(z-1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)z^{-n}$$

$$n(n-1)=n^2-n$$

$$n^2=n(n-1)+n$$

$$Z\left[n^2\right]=Z[n(n-1)]+Z[n]$$

$$Z[n^2]=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

Transformasi z

X(z) berbentuk :

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1}+..+b_1 z}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+..+a_0}$$

Jika *m=n,* maka *X(z)* dibawa ke bentuk

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b_m z^{m-1} + b_{m-1}z^{m-2}+..+b_1}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+..+a_0}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{(z-a_1)}+\frac{A_2}{(z-a_2)}+...$$

$$X(z)=\frac{A_1 z}{(z-a_1)}+\frac{A_2 z}{(z-a_2)}+...$$

Penyelesaian menjadi :

$$\frac{A_k z}{(z-a_k)} \leftrightarrow A_k (a_k)^n u[n]$$

$$\frac{A_k z}{(z-a_k)^2} \leftrightarrow A_k n(a_k)^{n-1} u[n]$$

$$\frac{A_k z}{(z-a_k)^{p+1}} \leftrightarrow A_k \frac{(n)_p}{p!}(a_k)^{n-p} u[n]$$

$$(n)_p = n(n-1)(n-2)..(n-p+2)$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z+0.5)(z-1)}$$

Jawab

$$\frac{z^2 + 4z}{(z+0.5)(z-1)} = \frac{A_1 z}{z+0.5} + \frac{A_2 z}{z-1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z+0.5} + \frac{A_2}{z-1}$$

$$\frac{z+4}{(z+0.5)(z-1)} = \frac{-2.33}{z+0.5} + \frac{3.33}{z-1}$$

$$\frac{z^2 + 4z}{(z+0.5)(z-1)} = \frac{-2.33z}{z+0.5} + \frac{3.33z}{z-1}$$

$$x[n] = -2.33(-0.5)^n u[n] + 3.33u[n]$$

Jika *m<n*, maka *X(z)* dibawa ke bentuk :

$$X(z) = \frac{A_1}{(z-a_1)} + \frac{A_2}{(z-a_2)} + \ldots$$

$$\frac{A_k}{(z-a_k)} \leftrightarrow A_k (a_k)^{n-1} u[n-1]$$

$$\frac{A_{k1}}{(z-a_k)} \leftrightarrow A_k (a_k)^{n-1} u[n-1]$$

$$\frac{A_{k2}}{(z-a_k)^2} \leftrightarrow A_{k2}(n-1)(a_k)^{n-2} u[n-1]$$

$$\frac{A_{kp}}{(z-a_k)^p} \leftrightarrow A_{kp} \frac{(n)_{p-1}}{(p-1)!}(a_k)^{n-p} u[n-1]$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)(z-0.5)^2}$$

Jawab

$$\frac{z^2 + 2z}{(z+1)(z-0.5)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_{21}}{z-0.5} + \frac{A_{22}}{(z-0.5)^2}$$

$$A_1 = \left. \frac{z^2 + 2z}{(z-0.5)^2} \right|_{s=-1} = \frac{-1}{2.25} = -0.44$$

$$A_{21} = \left. \frac{d}{dz} \frac{z^2 + 2z}{(z+1)} \right|_{s=0.5} = 1.44$$

$$A_{22} = \left. \frac{z^2 + 2z}{(z+1)} \right|_{s=0.5} = \frac{1.25}{1.5} = 0.83$$

$$X(z) = \frac{-0.44}{z+1} + \frac{1.44}{z-0.5} + \frac{0.83}{(z-0.5)^2}$$

$$x[n] = -0.44(-1)^{n-1}u[n-1] + 1.44(0.5)^{n-1}u[n-1] + 0.83(n-1)(0.5)^{n-2}u[n-1]$$

TEOREMA PERGESERAN

Bila x(n) = 0 untuk n < 0

dan Z [x (n)] = X(z), maka Z [x (n-n_o)] = $Z^{-n_o}[X(z) - \sum_{n=-n_o}^{0} x(n)Z^{-n}]$

dan Z [x (n + n_o)] = $Z^{n_o}[X(z) - \sum_{n=0}^{n_o} x(n)Z^{-n}]$

Dengan : n bilangan cacah : 0, 1, 2 ….

Bukti :

Z [x (n – n_o)] $= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-n_o)z^{-n} = \sum_{m=-n_o}^{\infty} x_m z^{-(m+n_o)}$

$$= z^{-n_o} \sum_{m=-n_o}^{\infty} x_m z^{-m}$$

$$= z^{-n_o}\{x(-n_o)z^{n_o} + x(-n_o+1)z^{n_o-1} + \ldots. + x(-1)z + x(o) + x(1)z^{-1} + \ldots\}$$

$$= x(-n_o) + x(-n_o+1)z^{-1} + \ldots. + x(-1)z^{-n_o+1} + z^{-n_o}\{x(o) + x(1)z^{-1} + \ldots\}$$

$$= x(-n_o) + x(-n_o+1)z^{-1} + \ldots. + x(-1)z^{-n_o+1} + z^{-n_o}\ X(z)$$

$$= Z^{-n_o}[X(z) - \sum_{n=-n_o}^{0} x(n)Z^{-n}]$$

Contoh : Tentukan Transformasi Z dari :

x (n + 1)

x (n + 2)

Z [x (n +1)] = z [X (z) – x (0)]

= z X (z) – z x (0)

$$Z\,[x\,(n+2)] = Z^2 \left[X(z) - \sum_{n=0}^{1} x(n)\, z^{-n} \right]$$

z^2 [X (z) – x (0) – x (1) z^{-1}]

z^2 X (z) – z^2 x (0) – z x (1)

11. Persamaan Differensial

x (n + 2) + 3x (n + 1) + 2 x (n) = 0

x (0) = 0 dan x (1) = 1

z^2 X (z) – z^2 x (0) – z x (1) + 3 [z X (z) – z x (0)] + 2 X (z) = 0

[z^2 + 3z + 2] X (z) – z = 0

$$X(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$$

$$= \frac{z}{(z+2)(z+1)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{Z+2} + \frac{K_2}{Z+1}$$

$$X(z) = -\frac{z}{z+2} + \frac{z}{z+1}$$

$$X(z) = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

$Z(a^n) \quad = \dfrac{z}{z-a}$

$X(z) \quad = \dfrac{z}{z-(-1)} - \dfrac{z}{z-(-2)}$

x (n) = $[-1]^n - [-2]^n$

n = 0, 1, 2, 3…

Carilah response x (n) dari sistem

x (n + 2) – 3 x (n + 1) + 2 x (n) = U (n)

x (n) = 0 untuk n $\leq$ 0

U (n) = 1 untuk n < 0, n > 0

U (n) = 0 untuk n = 0

δ(n)

n = -1

x (1) – 3 x (0) + 2 x (-1) = U (-1)

x (1) = 0

z^2 X (z) – z^2 x (0) – z x (1) – 3 [z X (z) – z x (0)] + 2 X (z) = Z [U(n)]

(z^2 – 3z+ 2) X(z) = Z [U(n)]

Z [U(n)] $= \sum_{n=0} U(n) Z^{-n}$

= 1

$X(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + z}$

$= \dfrac{1}{(z-2)(z-1)}$

$$= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Z [x (n +1)] = z X (z) – z x (0)

Z [x (n + 1)] = z X (z)

$$= \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

x (n +1) = - $(1)^n$ + $(2)^n$

= -1 + 2^n n = 0, 1, 2, …

x (n) = -1 + 2^{n-1} n = 0, 1, 2, 3, …

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2\,(z-2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2\,(z-2)}$$

$$= \frac{Z}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}$$

A = -1

B = -1

C = 1

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$X(z) = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

$$= -\frac{1}{z} \cdot \frac{Z}{(Z-1)^2} - \frac{Z}{Z-1} + \frac{Z}{Z-2}$$

x (n) = $-n-1^K + 2^K$

z^2 X (z) - z^2 x (0) - z x (1)

-3 [Z X (z) - Z x (10)] + 2 X (z) = Z[U(n)]

(Z^2 - Z +2) X (z) = Z[U(n)]

U (Z) = Z [U(n)] $= \sum_{n=0} U(n) Z^{-n}$

= 1

X(z) $= \dfrac{1}{z^2 - 3z + z}$

$= \dfrac{1}{(z-2)(z-1)}$

$= \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

Z [x (n + 1)] = z X (z) - z x (0)

x (0) = 0

Z [x (n + 1)] = z X (z)

$= \dfrac{-z}{z-1} + \dfrac{z}{z-2}$

x (n + 1) = $-(1)^n + (2)^n$

= $-1 + 2^n$ n = 0,1,2, ...

x (n) = $-1\ 2^{n-1}$ n = 0,1,2,3 ....

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

INVERS TRANSFORMASI Z

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	10	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

INVERS TRANSFORMASI Z

4 Methode :

1. Direct Division
2. Computational
3. Partial Fraction Expansion
4. Inverse Integral

1. Direct Division

- Divide denominator polynomial into numerator polynomial to get series of form
- In the Direct Division method we obtain the inverse Z transform by expanding x(Z) into an infite power series in Z^{-1}

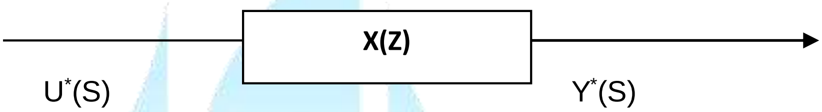
$$x(Z) = \sum_{k=0}^{\sim} x(KT)Z^{-K}$$

$$= x(0) + x(T)\,Z^{-1} – x(2T)\,Z^{-2} + x(3T)\,Z^{-3} – x\,(4T)\,Z^{-4} + ...+ x(KT)Z^{-k} +.....$$

Or

$$x(Z) = \sum_{k=0}^{\sim} x(KT)Z^{-K}$$

$$= x(0) + x(1)\,Z^{-1} + x(2)\,Z^{-2} + ….+ x(k)\,Z^{-k} + …$$



- Find x (k) for K = 0,1,2,3,4 when x(Z) is given by

$$X(Z) = \frac{10Z+5}{(Z-1)(Z-0,2)}$$

$$= \frac{10Z+5}{Z^2-1,2Z+0,2}$$

First, rewrite X(Z) as a ratio of polynomial is in Z^{-1}, as follows :

$$X(Z) = \frac{10Z^{-1}+5Z^{-2}}{1-1,2Z^{-1}+0,2Z^{-2}} \quad \text{(num) /(den)}$$

Dividing the numerator by the denominator, we have

$$1-1,2\,Z^{-1} + 0,2\,Z^{-2} \;\Big)\; \frac{10Z^{-1}+17Z^{-2}+18,4Z^{3}+18,68Z^{-4}+\ldots..}{10Z^{-1}+5Z^{-2}}$$

$$\frac{10Z^{-1}+12Z^{-2}+2Z^{-3}}{17Z^{-2}-2Z^{-3}} -$$

$$\frac{17Z^{-2}-20,4Z^{-3}+3,4Z^{-4}}{18,4Z^{-3}-3,4Z^{-4}} -$$

$$\frac{18,4Z^{-3}-22,08Z^{-4}+3,68Z^{-5}}{18,68Z^{-4}-3,68Z^{-5}}$$

$$18,68\,Z^{-4} - 22,416Z^{-5} + 3,736Z^{-5}$$

Thus,

$X(Z) = 10Z^{-1} + 17Z^{-2} + 18,4Z^{-3} + 18,68Z^{-4} + \ldots\ldots\ldots$

By comparing this infinite series expansion of X(Z) with X(Z) = $\sum_{K=0}^{X}$ X(K)Z^{-k}, we obtain.

X(0) = 0

X(1) =10

X(2) = 17

X(3) = 18,4

X(4) = 18,68

- Find X (K) when X (Z) is given by

X(Z) = $\frac{1}{Z+1} = \frac{Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$

By dividing the numerator by the denominator, we obtain

$$1 + Z^{-1} \;\; \frac{Z^{-1} - Z^{-2} + Z^{-3} - Z^{-4} + \ldots\ldots\ldots}{Z^{-1}}$$

$$\frac{Z^{-1} + Z^{-2}}{-Z^{-2}} -$$

$$\frac{-Z^{-2} - Z^{-3}}{Z^{-3}} -$$

$$\frac{Z^{-3} + Z^{-4}}{- Z^{-4}} -$$

$X_z = \sum_{K=0}^{\sim} X(K) Z^{-k}$

X(0) = 0

X(1) =1

X(2) = -1

X(3) = 1

X(4) = -1

- Obtain the inverse Z transform of
  $X(Z) = 1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 4Z^{-3}$

  X(0) =1

  X(1) =2

  X(2) = 3

  X(3) = 4

All other X(K) values are zero.

2. Computational Method

Two computational approaches the invers z transform

1. MATLAB Approach
2. Differencce equation approach

1. MATLAB Approach

MATLAB filter command.

Determine response to Kronecker data input function for discrete time systems

X(k) = 1 k= 0

0 Otherwise

X(z) = 1

$$\text{Let } G(z) = b_0 \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

Form num = [b_0 b_1 b_2 ...]

den = [1 a_1 a_2 ...]

g = filter [num,den, x]

g = output

num, den = fungsi alih

consider a system G(z) defined by :

$$G(z) = \frac{0{,}4673z^{-1} - 0{,}33933z^{-2}}{1 - 1{,}5327z^{-1} + 0{,}6607z^{-2}}$$

Assume that x(k), the input to the system G(z)m is the kronecker delta input or

X(k) = 1 k = 0

$= 0$ for $k \neq 0$

The z transform of kronecker delta input.

X(z) = 1

Using the kronecker delta input

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0{,}4673z^{-1} - 0{,}33933z^{-2}}{1 - 1{,}5327z^{-1} + 0{,}6607z^{-2}}$$
$$= \frac{0{,}4673z - 0{,}33933}{z^2 - 1{,}5327z + 0{,}6607}$$

MATLAB can be used for finding the inverse z transform. The input x (z) is the z transform of the kronecker delta input. In MATLAB the kronecker delta input is given by :

X = [1 zeros (1, N)]

Where N corresponds to the end of the discrete time duration

$$G(z) = Y(z) = \frac{0{,}4673z - 0{,}33933}{z^2 - 1{,}5327z + 0{,}6607}$$

Hence the inverse transform of G(z) is given by y(0), y(1), y(2), … obtain y(k) up to k =40

To obtain the inverse z transform of G(z) with MATLAB, we proceed as follows :

1. Enter the numerator and denomerator as follows :

   Num = [0 0,473 -0,3393]

   Den = [1 -1,5327 0,6607]

2. Enter the kronecker delta input

   X = [1 zeros (1, 40)]

3. Enter the command

   Y = filter (num, den, x)

To obtain the response y (k) from k = 0 to k = 40

MATLAB Program

```
% -------------- Finding Inverse Z Transform ------------------
%**** Finding the inverse z transform of G(z) is the same as finding the reponse of the
% same as finding the response of the system Y(z)/X(z) = G(z) to the kronecker delta
%input****
%***enter the numerator and denominator of G(z)
Num =[ 0     0,473     -0,3393]
Den = [ 1     -1,5327     0,6607]
%***Enter the kronecker delta input X and filter
% command y = filter (num, den, x) ***
X = [1  zeros  (1, 40)];
Y = filter (num, den, x)
```

If this program is executed, the screen will show the output y(k) from k = 0 to 40 as follows

Y =

columns 1 through 7

0	0,4673	0,3769	0,2690	0,1632	0,0725	0,0032

.

.

.

Columns 36 through 41

0,002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

MATLAB computations begin from column 1 and end at column 41, rather than from 0 to column 40.

These values give the inverse z transform og G(z). that is

Y(0) = 0

Y(1) =0,4673

Y(2) = 0,3769

Y(3) = 0,2690

Y(4) = 0,1632

Y(5) = 0,0725

.

.

.

Y(40) = 0,0001

Plotting response to the kronecker delta input

```
Num = [ 0      0,4673        -0,3393 ]

Den = [ 1      -1,5327       0,6607]


X = [ 1  zeros (1,40) ]

V = [ 0    40    -1    1]

Axis (v);

K = 0 : 40;

Y = filter (num, den, x);

Plot (x, y, ‘o’)

Grid

Title (‘response to kronecker delta input’)

Xlabel (’k’)

Ylabel (’y(k)’)
```

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

STATE VARIABEL

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	11	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

STATE VARIABEL

Bentuk persamaan model state variable

x = Ax + BU

y = Cx + DU

Dengan x = state vector

0

X : turunan pertama state vector

u : masukan sistem

y : keluaran sistem

A : matrik sistem nxn

B : matrik masukan nx1

C : matrik keluaran 1xn

D : matrik feedforward nx1

Fungsi alih H(s) sistem dapat dikelompokkan dalam 3 bagian :

1. NO ZERO
2. SEJATI
3. SEMU

$$H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)....(s-z_m) \rightarrow zero}{((s-p_1)(s-p_2)....(s-p_n) \rightarrow pole}$$

1. BENTUK NO ZERO

$$H(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$H(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$$Y(s)\,[s^3 + 3s^2 + 4s + 6] = KU(s)$$

$$\Rightarrow y''' + 3y'' + 4y' + 6y = KU(t)$$

$$y''' = -3y'' - 4y' - 6y + KU(t)$$

misal :

$$\begin{aligned}
y &= x_1 \\
y' &= x'_1 = x_2 \\
y'' &= x'_2 = x_3 \\
y''' &= x'_3 = -3y'' - 4y' - 6y + KU(t) \\
& = -3x_3 - 4x_2 - 6x_1 + KU(t)
\end{aligned}$$

Bentuk phase state variabel

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} U$$

Keluaran :

$$y = x_1$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Bentuk diatas dapat dinyatakan dengan formula :

$$\begin{bmatrix} \overset{0}{x}_1 \\ \overset{0}{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & ....0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ......0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ -a_0 & -a_1 & & & ....-a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ K \end{bmatrix} u$$

Keluaran :

$$Y = [1 \quad 0 \quad ....0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

2. BENTUK SEJATI

$$H(s) = \frac{K(2s^2 + 5s + 7)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(2s^2 + 5s + 7)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \cdot \frac{V(s)}{V(s)}$$

$$= \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6} \quad \frac{(2s^2 + 5s + 7)}{1}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$(s^3 + 3s^2 + 4s + 6)\, V(s) = KU(s)$

V''' + 3V'' + 4V'' + 6V = KU

V''' = -3V'' - 4V' - 6V + KU

misal :

V	=	x_1		
V'	=	x'_1	=	x_2
V''	=	x'_2	=	x_3
V'''	=	x'_3	=	$-6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + KU$

phase state variabel

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} U$$

Keluaran :

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = 2s^2 + 5s + 7$$

$Y(s) = (2s^2 + 5s + 7)\, V(s)$

$Y(t) = 2V'' + 5V' + 7V$

$= 7x_1 + 5x_2 + 2x_3$

$$= [7 \quad 5 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Bentuk Umum

$$H(s) = \frac{K(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + ... + b_1 s + b_o)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + ... + a_1 s + a_o}$$

psv :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & ....0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & ....0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ...0 \\ & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & & & & ....-a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ K \end{bmatrix} u$$

Keluaran :

$$Y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad .....b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

3. FUNGSI ALIH SEMU

H(s) $= \dfrac{K(s^2 + 2s^2 + 5s + 7)}{s^2 + 3s^2 + 4s + 6}$

Diselesaikan seperti model F.A sejati

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} . \quad \frac{V(s)}{V(s)} .$$

$$= \frac{Y(s)}{V(s)} . \quad \frac{V(s)}{U(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$(3^3 + 3s^2 + 4s + 6)$ V(s) = KU(s)

V''' + 3V'' + 4V'' + 6V = KU(t)

V''' = -3V'' - 4V' - 6V + KU(t)

misal :

V = x_1

V' = x'_1 = x_2

V'' = x'_2 = x_3

V''' = x'_3 = $-6x_1 - 4x_2 - 3x_3$ + KU psv :

$$\begin{matrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ -6 & -4 & -4 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} U$$

Keluaran : $\frac{Y(s)}{V(s)} = s^3 + 2s^2 + 5s + 7$

$Y(s) \quad = \quad (s^3 + 2s^2 + 5s + 7)\ V(s)$

$Y(t) \quad = \quad V + 2V + 5V + 7V$

$\quad = \quad -6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + KU + + 2x_3 + 5x_2 + 7x_1$

$Y(t) = (7\text{-}6)\ x_1 + (5 - 4)\ x_2 + (2 - 3)\ x_3 + KU$

$Y(t) = x_1 + x_1 - x_1 + KU$

$$= [1 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [K]U$$

Bentuk Umum

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1s^n + b_{n-1s}{}^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

psv :

0

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots\ldots\ldots 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \;\ldots 0 \\ -a_0 & -a_1 & & \ldots\ldots\ldots -a_{n-1} & \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ K \end{bmatrix} U$$

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

UNIVERSITAS MERCU BUANA

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

STATE VARIABEL - lanjutan

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	12	MK14004	Ketty Siti Salamah, S.T., M.T.

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

STATE VARIABEL

SIMULASI UNTUK F.A SEJATI

$$H(s) = \frac{K(2s^2 + 5s + 7)}{s^2 + 3s^2 + 4s + 6}$$

$y\ (s)\ (s^3+3\ s^3+4s+6) = (2Ks^2+5\ Ks+7K)\ U(s)$

$y''' + 3y''+4y'+6y = 2KU''+5KU'+7KU$

$y'' = -3y'' - 4y' - 6y +2KU''+5KU'+7KU$

1. Bentuk keluaran y sebagai bentuk Integrasi dari y dan u

   $y'' = -3y' - 4y' - 6\int y +2KU'+5KU'+7K\int U$

   $y' = -3y' - 4\int y' - 6\int\int y +2KU'+5K\int U'+7K\int\int U$

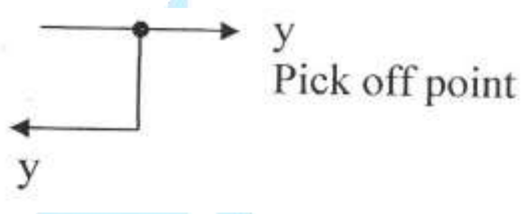
   $y = -3\int y' - 4\int\int y' - 6\int\int\int y +2K\int U'+5K\int\int U'+7K\int\int\int U$

2. Gambar diagram blok sistem dengan y sebagai keluaran dan u masukan

   Integral tunggal : $3\int y$ dan $2K \int U$ keluaran y.

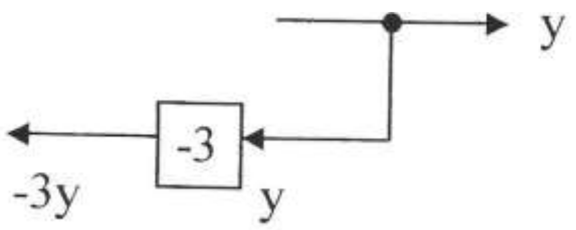
   Integral tunggal : $-3 \int y$ dan $2K \int U$ keluaran y.

1.

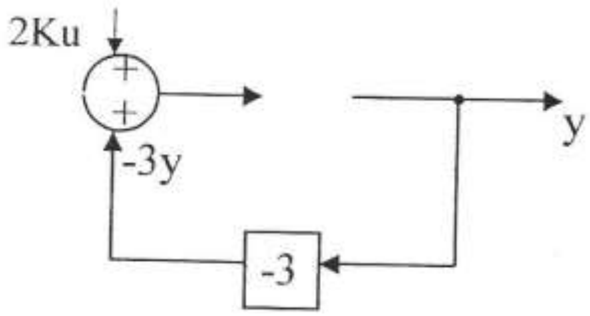


1.

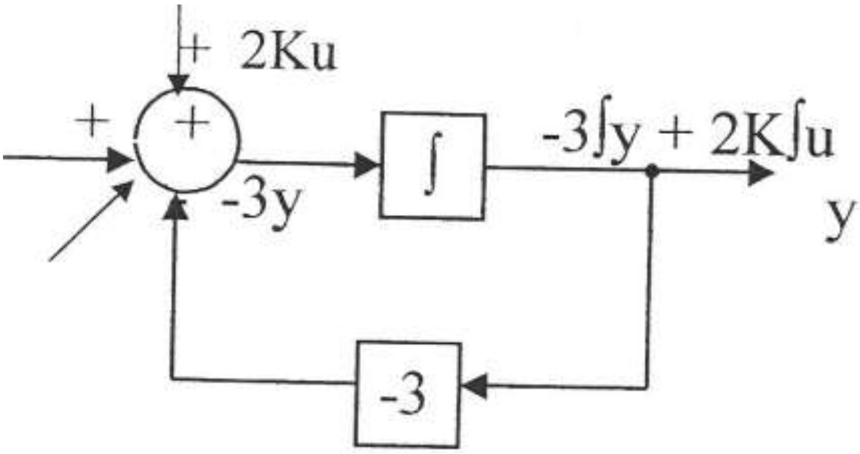
2.



3.



4.



untuk fungsi lainnya (∫∫ dan ∫∫∫)

Summing point 1

$\overset{0}{x}_1$ = 7KU – 6y

Summing point 2

$\overset{0}{x}_2$ = x_1 – 4y + 5KU

Summing point 3

$\overset{0}{x}_3 = x_2 - 3y + 2KU$

$y = x_3$

$\therefore \quad \overset{0}{x}_1 = -6x_3 + 7KU$

$\overset{0}{x}_2 = x_1 - 4x_3 + 5KU$

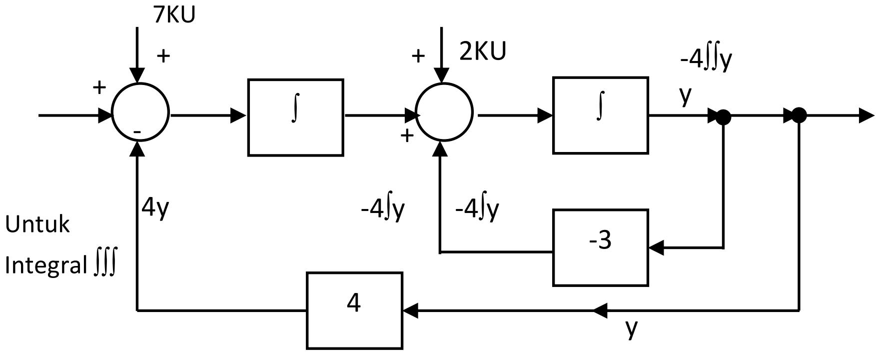
$\overset{0}{x}_3 = x_2 - 3x_3 + 2KU$

psv : $\overset{0}{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ -0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7K \\ 5K \\ 2K \end{bmatrix} U$

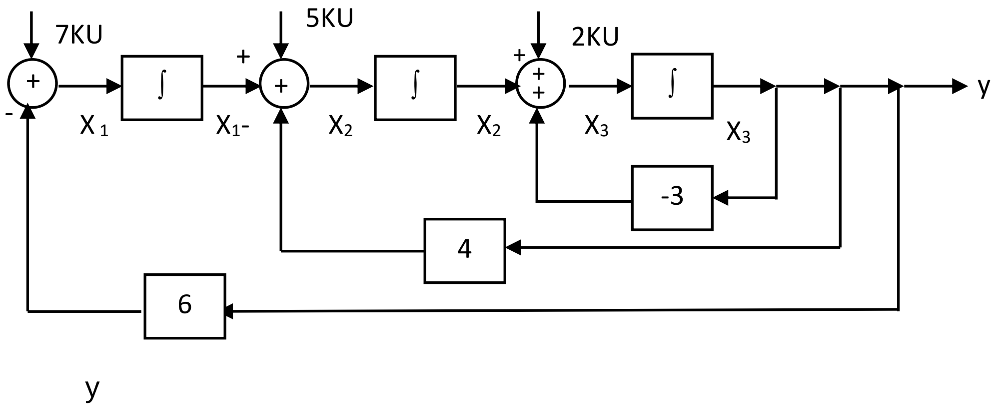
keluaran y $= x_3$

$= [\,0 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

1. Integral Ganda -4 ∫ ∫ y + 5 K ∫ ∫ U



2. Integral lipat tiga



2. Tuliskan masukkan dan keluarkan pada setiap integrator ke : X I dan X

3. Tuliskan hubungan / persamaan di <u>setiap summing piont.</u>

4. Bentuk psv dan keluaran .

PENYELESAIAN PERSAMAAN STATE VARIABLE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + F \qquad ; \qquad x\,(0) = K$$

Bila A matrik diagonal dan F = 0

Maka persamaan menjadi :

$$\dot{x}_1 = \lambda_1\, x_1 \qquad x_1\,(0) = K_1$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2\, x_2 \qquad x_2\,(0) = K_2$$

$$\dot{x}_3 = \lambda_1\, x_3 \qquad x_3\,(0) = K_3$$

maka didapat penyelesaian

$$x_1 = k_1 e^{\lambda 1t}$$

$x_2 = k_2 e^{\lambda 2t}$

$x_3 = k_3 e^{\lambda 3t}$

$$
\begin{array}{ll}
K_1^{\lambda 1t} & = K_1 \\
K_2^{\lambda 2} & = K_2 \\
K_3^{\lambda 3} & = K_3
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda 1} + K_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda 2t} + K_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda 3t}
$$

Atau

$$
x = \begin{bmatrix} e^{\lambda 1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda 2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda 1t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}
$$

Bila A bukan matrik diagonal dan $F \neq 0$

Maka :

$\overset{o}{x} = Ax + F(t) \quad ; \quad x(0) = K$

dengan A : matrik konstanta $\quad n \times n$

F(t) : fungsi masukan $\quad n \times 1$

K : nilai awal state vector

Misal $x = Py$ dan P adalah matrik n x n

Maka $\overset{o}{x} = P\overset{o}{y}$

Persamaan diatas menjadi
o

$Py = Apy + F(t)$; $x(0) = P\,y(0) = K$

P : non singular matrik

$Y = P^{-1}APy + P^{-1}F(t)$; $y(0) = P^{-1}K$

Persamaan ini sama dengan persamaan semula dengan matrik konstanta $P^{-1}AP$.

Masalah : Bagaimana memilih matrik P sehingga $P^{-1}AP$ adalah matrik diagonal, atau matrik segitiga.

Pertanyaan :

1. Apakah selalu terdapat matrik P, non singular, sehingga $P^{-1}AP$ matrik diagonal.
2. Bila,ya, bagaimana mendapatkan P, bila tidak, kapan P dapat diperoleh dan bagaimana caranya.
3. Bila tidak dapat diperoleh matrik P sedemikian $P^{-1}AP$ menjadi diagonal matrik. Bagaimana membuat matrik $P^{-1}AP$ mendekati matrik diagonal.
4. Dapatkah selalu diperoleh matrik P sehingga $P^{-1}AP$ menjadi matrik segitiga.

EIGEN VALUES DAN EIGEN VECTORS

Eigen value dan eigen vector dari suatu matrik b.s A, dapat di cari dari persamaan

$AX = \lambda x$

Dengan x : Eigen vector $A x = \lambda x$

λ : Eigen value

Bila A dengan ukuran n x n maka, akan diperoleh n eigen value dan n eigen vector.

Dari n eigen vector dapat disusun matrik P dan P^{-1} dengan ukuran n x n yang non singular .

Maka $P^{-1}AP$ akan membentuk matrik diagonal yang berisi nilai eigen.

$$P^{-1}AP = Dg\,[\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n]$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

1. Nilai eigen dan vector eigen
2. Matrik P yang di bentuk oleh eigen vector
3. P^{-1} AP sama dengan matrik diagonal nilai eigen.

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

λ : nilai eigen eigen vector

1. Susun persamaan $Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

maka $[A - \lambda I]x = 0$

atau $[\lambda I - A]x = 0$

2. Tentukan polinomial karakteristik

   $C(\lambda)$ = determinan $\lambda I - A$

   Persamaan karakteristik $|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$C(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0 \qquad |A - \lambda I| = 0$

$$\lambda^2 - [2+3+2]\lambda^2 + \left[\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right]\lambda -$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

3. Hitung akar-akar karakteristik yang merupakan nilai eigen

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 1$

4. Hitung eigen vector untuk masing-masing nilai eigen

$\lambda_1 = 5$ disubsitusi pada persamaan homogen

$[\lambda_1 - A]\, x = 0$ atau $[A - \lambda_1] = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 1 \\ 2 & 3-5 & 2 \\ 1 & 1 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan persamaan linier homogen ini dengan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad H_{13} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{21}^{(-2)}\quad H_{31}^{(3)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \quad H_{32}^{(1)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2}^{(-1/4)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_{12}^{(-1)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan rank matrik

r = 2 L : dimensi ruang jawab

n = 3

L = n - r

= 3 - 2 = 1

$\therefore$ boleh dipilih 1 jawab

Persamaan : $x_1 - x_3 = 0$

$x_2 - 2x_3 = 0$

Misal $x_3 = c$

$x_1 = c$

$x_2 = 2c$

$$\therefore \text{Eiger vector } x = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = 1$ maka $[A - \lambda I]\, x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan persamaan linier homogen dengan operasi baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ \\ H_{31}^{(-1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank matrik $r = 1$ $\quad L = 3-1$

$n = 3$ $\quad = 2$

$\therefore$ Boleh dipilih 2 jawaban

persamaan : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

pilih 2 jawab, misal $x_2 = c_1$

$x_3 = c_2$

$\therefore x_1 = -x_2 - x_3$

$= -c_1 - c_2$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 \\ c_1 & \\ & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka eigen vector yang diperoleh

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka matrik P yang dibentuk oleh eigen vector x_1, x_2, x_3 adalah P =

[x_1, x_2, x_3]

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung $P^{-1}AP$

$$P^{-1} = {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

10 1 0

5 0 1

$$P^{-1}AP = {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 10 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= Dg\,[\,\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\,] = Dg\,[5, 1, 1\,]$$

Contoh persamaan state variabel

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x} \\ \dot{x} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ;\ x\,(0) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP = Dg\,[\,5\,,1,\,1\,]$ nilai eigen

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\dot{x} = AX$$

$$x = Py \qquad \dot{x} = P\dot{y}$$

$$P\dot{y} = Apy \qquad Py(0) = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = P^{-1}Apy \qquad y(0) = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{4} \\ -{}^{1}/_{2} \\ {}^{1}/_{4} \end{bmatrix}$$

$y_1' - 5y_1 = 0$ $\qquad$ $y_1 = {}^{3}/_{4}\, e^{5t}$

$y_2' - y_2 = 0$ $\qquad$ $y_2 = -{}^{1}/_{2}\, e^{t}$

$y_3' - y_3 = 0$ $\qquad$ $y_3 = {}^{1}/_{4}\, e^{t}$

$$y(t) = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{4}\; e^{5t} \\ -{}^{1}/_{2}\; e^{t} \\ {}^{1}/_{4}\; e^{t} \end{bmatrix}$$

$$= {}^{3}/_{4} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix} e^{5t} - {}^{1}/_{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \end{bmatrix} e^{t} + {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \end{bmatrix} e^{t}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$x(t) \quad = Py\,(t)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{3}/_{4}\, e^{5t} \\ -{}^{1}/_{2}\, e^{t} \\ {}^{1}/_{4}\, e^{t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{4}\, e^{5t} & + \; {}^{1}/_{2}\, e^{t} - \; {}^{1}/_{4}\, e^{t} & \\ {}^{3}/_{4} \,.\, 2e^{5t} & - \; {}^{1}/_{2}\, e^{t} & + \; 0 \,.\, {}^{1}/_{4}\, e^{t} \\ {}^{3}/_{4}\, e^{5t} & + \; 0 \,.\, (-{}^{1}/_{2}\, e^{t}) & + \; {}^{1}/_{4} \end{bmatrix}$$

$$= \; {}^{3}/_{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} - {}^{1}/_{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + {}^{1}/_{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}$$

$x = {}^{3}/_{4}\, x_1\, e^{5t} - {}^{1}/_{2}\, x_2\, e^{t} + {}^{1}/_{4}\, x\, e^{t}$

x_1, x_2 , x_3 eigen vector dari matrik koefisien A

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

RESPON SISTEM

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	13	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

Respon Sistem

Respon Sistem

Pada modul sebelumnya, fungsi alih sebuah model sistem dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika. Untuk lebih memahami karakteristik dan sifat sistem tersebut, maka persamaan waktu itu dibuatkan grafiknya dengan mengubah-ubah waktunya, dari mulai t = 0 hingga t mendekati tak hingga ($t \rightarrow \infty$) (dikenal dengan istilah *time-invariant sistem*). Penggambaran sistem dalam bentuk grafik waktu disebut dengan Respon Waktu (*Time Response*). Pada modul yang akan datang, akan dibahas pula Respon Frekuensi (*Frequency Response*).

Respon keluaran sebuah sistem, sebenarnya adalah gabungan dari 2 (dua) respon, yaitu:

- Respon Paksaan (*forced response*), dan
- Respon Alami (*natural response*)

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai respon waktu sebuah sistem, ada baiknya memahami terlebih dahulu konsep Pole dan Zero. Dengan konsep ini, respon waktu sistem dapat dipahami terlebih dahulu secara kualitatif, sebelum akhirnya dianalisa lebih dalam secara kuantitatif.

Pole sebuah fungsi alih adalah harga-harga dimana variable Laplacenya, s, akan menyebabkan fungsi alih tersebut menjadi tak berhingga, atau semua akar penyebut fungsi alih. Pole biasa diplot dalam bentuk X. Sedangkan Zero sebuah fungsi alih adalah harga-harga dimana variable Laplacenya, s, akan menyebabkan fungsi alih tersebut menjadi nol, atau semua akar pembilang fungsi alih, dan diplot dalam bentuk O. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 13.1

Sebuah fungsi alih tampak pada Gambar 13.1(a). Pole-nya adalah s = -5, dan Zero-nya adalah s = -2. Harga-harga ini diplot pada sebuah bidang kompleks (*s-plane*) seperti pada Gambar 13.1(b). Untuk menguji sifat-sifat Pole dan Zero, diberikan masukan tangga satuan (*unit step*) ke dalam sistem. Dari Gambar 13.1(a), didapat:

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}, \qquad (13.1)$$

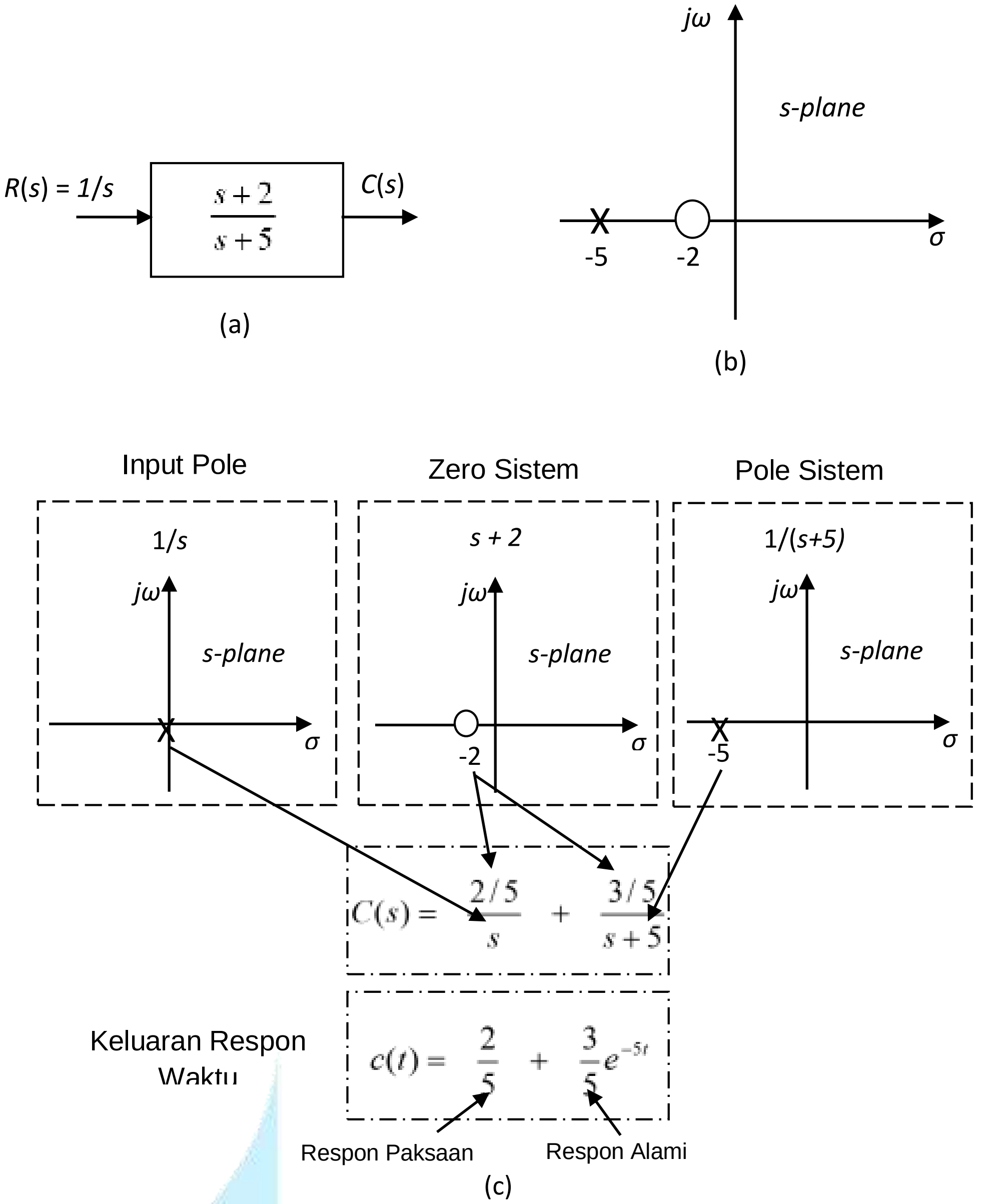
dimana

$$A = \frac{(s+2)}{(s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{(s+2)}{s}\Big|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

maka

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t} \qquad (13.2)$$



Gambar 13.1 (a) Input dan Output Sistem, (b) Plot Pole dan Zero dari Sistem, (c) Proses Pembentukan Respon

Dari Gambar 13.1(c) dapat diambil kesimpulan, yaitu:

1. Pole dari fungsi input akan memberikan bentuk bagi Respon Paksaan
2. Pole dari fungsi alih akan memberikan bentuk bagi Respon Alami
3. Pole yang terletak pada garis real, akan memberikan respon eksponensial, dalam bentuk e^{-at}, dimana *a* adalah lokasi Pole yang terletak pada sumbu aksis real tersebut. Jadi, semakin ke kiri letak sebuah Pole, atau semakin negative, akan semakin cepat respon eksponensialnya untuk turun menuju nol.
4. Zero membantu untuk membentuk Amplituda dari keadaan tunak dari kedua respon.

Dari kesimpulan diatas, Konsep Pole dan Zero ini dapat juga diaplikasikan untuk sistem yang lebih kompleks. Setiap Pole dari fungsi alih yang terletak di sumbu aksis real membentuk respon eksponensial, yang merupakan bagian dari respon alami. Sementara itu, Pole dari input akan membentuk respon paksaan.

Contoh 13.2

Sebuah Fungsi Alih diketahui sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$

Dimana *R*(*s*) adalah *1*/*s*. Maka:

$$C(s) = \frac{K_1}{s} \quad + \quad \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}$$

Setalah dilakukan Invers Transformasi Laplace, didapat Respon Keluaran:

$$c(t) = K_1 \quad + \quad K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}$$

13. Sistem Orde Pertama (*First Order System*)

Sebuah Sistem Orde Pertama adalah sistem yang memiliki fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \tag{13.3}$$

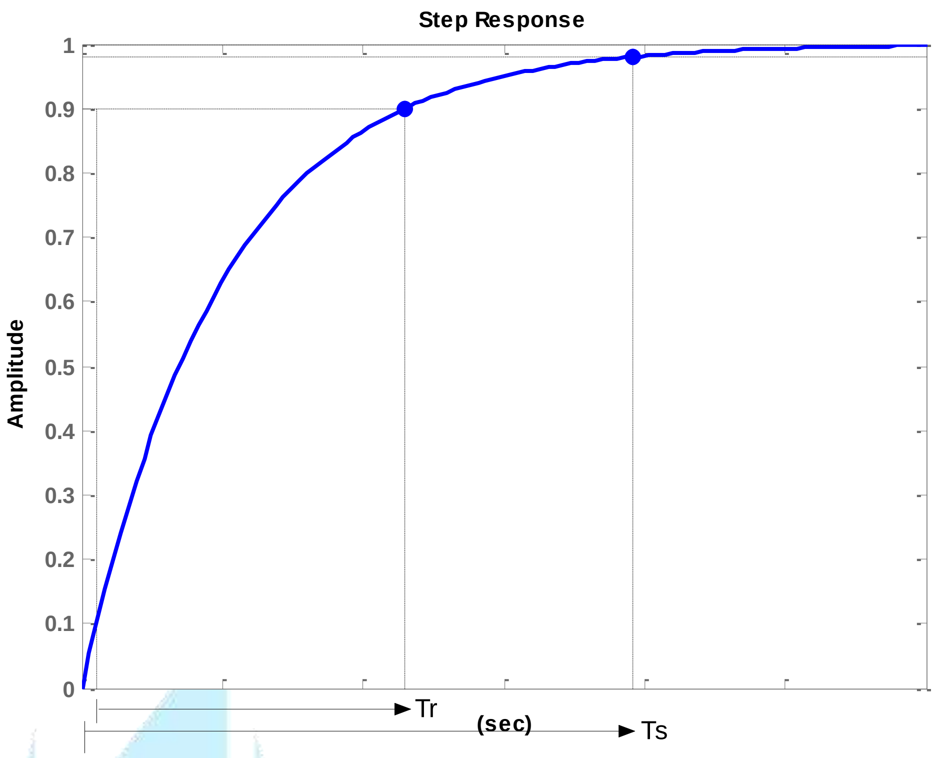
Jika sistem tersebut memiliki input R(s) = 1/s, maka:

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s}\frac{a}{(s+a)} \tag{13.4}$$

Dengan mengaplikasikan Invers Laplacem respon waktu keluaran sistem, adalah:

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \tag{13.5}$$

Dimana pole dari input pada $s = 0$ membentuk respon paksaan $c_f(t) = 1$, dan pole dari sistem pada $s = -a$ membentuk respon alami $c_n(t) = e^{-at}$. Persamaan (13.5) ini diplot dalam bentuk grafik pada Gambar 13.2.



Gambar 13.2 Respon Waktu Sistem Orde Pertama

Jika $t = 1/a$,

$$e^{-at}\Big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37 \qquad (13.13)$$

Atau

$$c(t) = 1 - e^{-at}\Big|_{t=1/a} = 1 - 0.37 = 0.63 \qquad (13.7)$$

Konstanta Waktu, *τ*

Harga dimana

$$\tau = 1/a \qquad (13.8)$$

disebut dengan konstanta waktu (*time constant*) dari respon sistem. Dari persamaan (13.13) dapat dikatakan bahwa konstanta waktu adalah waktu yang diperlukan agar e^{-at} menurun hingga 37% dari harga awalnya. Sedangkan dari persamaan (13.7), dapat dikatakan bahwa konstanta waktu adalah waktu yang diperlukan oleh sistem untuk naik sebesar 133% dari harga awalnya menuju harga tangga satuan.

Waktu Naik, Tr

Waktu naik (*rise time*) didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan oleh kurva untuk naik dari 0.1 ke 0.9 dari harga akhirnya. Harga ini didapat dari menurunkan kembali persamaan (13.5), untuk c(t) = 0.1 dan c(t) = 0.9. Jadi:

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a} = 2.2\tau \qquad (13.9)$$

Waktu Mantap, Ts

Waktu mantap (*settling time*) didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan agar respon mencapai 98% dari harga akhir. Dari persamaan (13.5) pula, didapat bahwa:

$$T_s = \frac{4}{a} = 4\tau \qquad (13.10)$$

Contoh 13.3

Jika diketahui sebuah sistem memiliki fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{20}{s+20}$$

Dimana $R(s) = 1/s$, maka tentukan Konstanta Waktu, Waktu Naik dan Waktu Mantap dan plot keluaran sistem tersebut!

Dari persamaan fungsi alih diatas, maka:

a = 20, sehingga

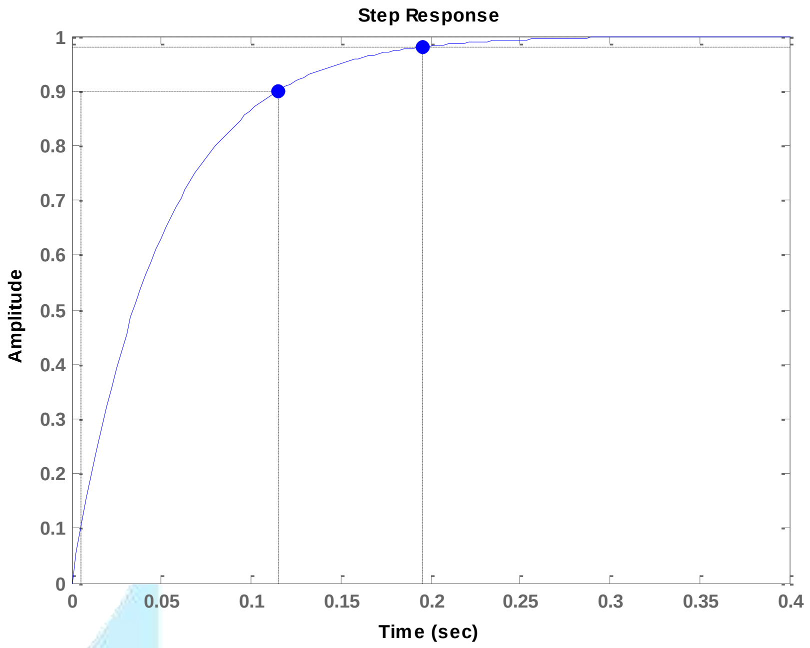
$\tau = 1/a = 1/20 = 0.05$ s

sehingga:

$Tr = 2.2\ \tau = 2.2 \times 0.05 = 0.11$ s

$Ts = 4\ \tau = 4 \times 0.05 = 0.2$ s

Plot respon waktinya adalah:



6.2. Sistem Orde Kedua (*Second Order System*)

Sebuah Sistem Orde Kedua adalah sistem yang memiliki fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{13.11}$$

Bentuk standar dari persamaan (13.10) adalah:

$$G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \tag{13.12}$$

Dimana ζ adalah rasio redaman dan ω_n adalah frekuensi alami.

Jika R(s) adalah 1/s, maka:

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2)} \tag{13.13}$$

Dari invers Laplace-nya akan didapat:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{\varsigma\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta) \tag{13.14}$$

Dimana:

$$\beta = \sqrt{1 - \varsigma^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\beta / \varsigma)$$

Dari persamaan (13.11) hingga (13.13) tampak bahwa respon sistem banyak dipengaruhi oleh harga rasio redaman, ζ . dimana:

$$s = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2} \tag{13.15}$$

Dari beberapa harga rasio redaman yang mungkin, maka terdapa beberapa respon dari sistem orde kedua, yaitu:

a. Sistem Redaman Lebih (*Overdamped System*)

Yaitu sistem dimana $\zeta > 1$, dan pole dari sistem memiliki harga-harga yang unik dan real, sehingga respon waktunya adalah:

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau 1} + k_2 e^{-t/\tau 2} \tag{13.113}$$

b. Sistem Redaman Kritis (*Critically Damped System*)

Yaitu sistem dimana $\zeta = 1$, dan pole dari sistem memiliki harga-harga yang sama dan real, sehingga respon waktunya adalah:

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau} + k_2 e^{-t/\tau} \tag{13.17}$$

c. Sistem Redaman Kurang (*Underdamped System*)

Yaitu sistem dimana $\zeta < 1$, sehingga respon waktunya adalah:

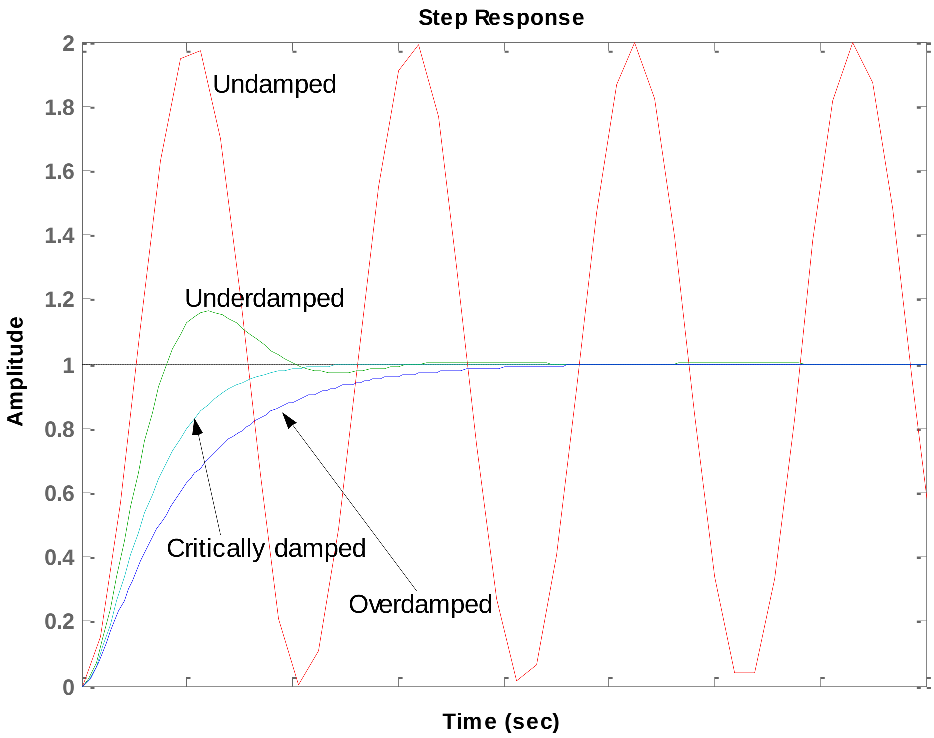
$$c(t) = 1 + Ae^{-t/\tau} \cos(\omega_n t - \theta) \tag{13.18}$$

d. Sistem Tak Teredam (*Undamped System*)

Yaitu sistem dimana $\zeta = 0$, sehingga respon waktunya adalah:

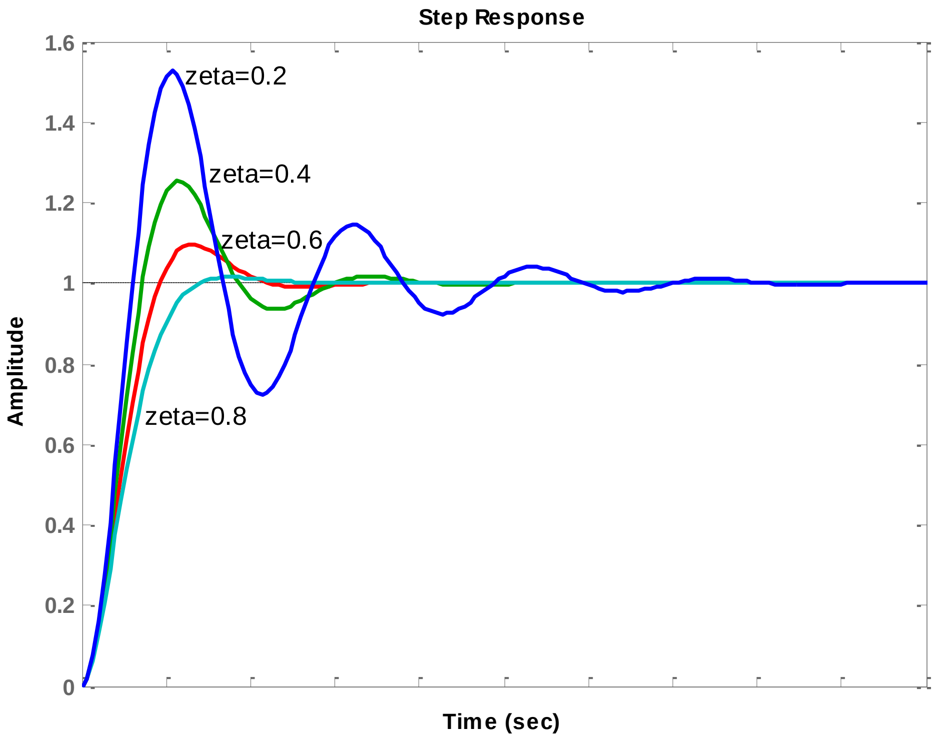
$$c(t) = 1 + A\cos(\omega_n t - \theta) \tag{13.19}$$

Gambar 13.3 memperlihatkan plot respon waktu dari beberapa harga ζ sehingga nampak perbedaan dari masing-masing keluaran sistem orde kedua ini.



Gambar 13.3 Respon Waktu Sistem Orde Kedua

Dari keseluruhan kondisi, Respon Waktu Redaman Kurang (*underdamped*), memiliki beberapa kemungkinan. Jika harga ζ diubah-ubah dari mulai yang kecil sehingga mendekati 1, akan didapatkan plot seperti yang tampak pada Gambar 13.4 di bawah ini.



Gambar 13.4 Respon Waktu Sistem Underdamped untuk beberapa harga ζ

Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books

MERCU BUANA

UNIVERSITAS

MODUL PERKULIAHAN

SISTEM LINEAR

RESPON WAKTU ORDE KEDUA

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Teknik	Teknik Elektro	14	MK14004	Ketty Siti Salamah, ST, MT

Abstract

Sistem Linear merupakan kelanjutan dari mata kuliah Rangkaian Listrik. Sistem linear memberikan dasar-dasar pengolahan sinyal baik secara digital maupun secara analog. Untuk itu diperlukan pengetahuan dasar tentang sistem dan sinyal (baik diskrit maupun kontinyu). Selain itu juga diberikan hal-hal dasar yang terkait dengan pengolahan sinyal seperti transformasi sinyal (fourier, laplace, z) serta aplikasinya dalam dunia elektro.

Kompetensi

Memahami konsep dasar sinyal dan sistem serta mampu menganalisa sinyal dan sistem dengan berbagai macam metoda, baik untuk sinyal kontinyu maupun diskrit.

RESPON WAKTU ORDE KEDUA

14.1 Sistem Orde Kedua (*Second Order System*)

Sebuah Sistem Orde Kedua adalah sistem yang memiliki fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{14.1}$$

Bentuk standar dari persamaan (14.1) adalah:

$$G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \tag{14.2}$$

dimana ζ adalah rasio redaman dan ω_n adalah frekuensi alami.

Jika $R(s)$ adalah $1/s$, maka:

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2)} \tag{14.3}$$

dari invers Laplace-nya akan didapat:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{\varsigma\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta) \tag{14.4}$$

dimana:

$$\beta = \sqrt{1 - \varsigma^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\beta / \varsigma)$$

Dari persamaan (14.1) hingga (14.4) tampak bahwa respon sistem banyak dipengaruhi oleh harga rasio redaman, ζ . dimana:

$$s = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2} \tag{14.5}$$

Oleh karena itu, untuk dapat menganalisa sistem, harus diketahui terlebih dahulu harga-harga dari ζ dan ω_n . Harga-harga tersebut dapat diketahui dengan menghubungkan persamaan (14.1) dan (14.2), yaitu:

$$\omega_n = \sqrt{a_0} \tag{14.6}$$

$$\varsigma = \frac{a_1}{2\omega_n} \tag{14.7}$$

Contoh 14.1

Jika diketahui sebuah fungsi alih sistem orde kedua, sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

maka tentukan harga ζ dan ω_n serta tentukan jenis keluaran respon waktunya!

Dari persoalan diatas, maka didapat:

$\omega_n = \sqrt{4} = 2$

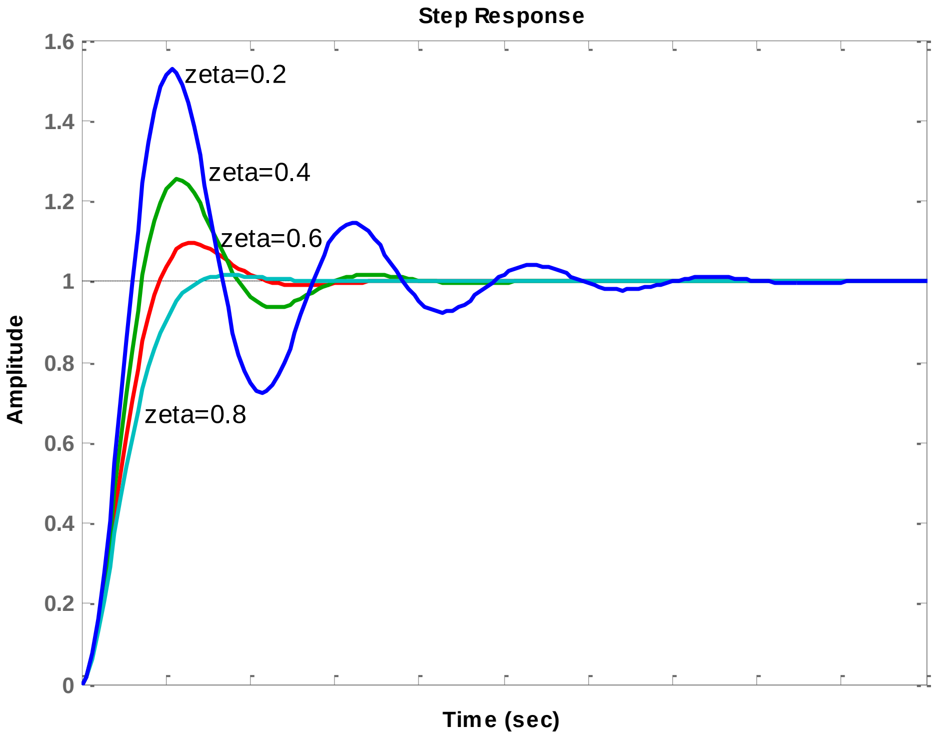
$\zeta = 2/(2)(2) = 0.5$

sehingga, sistem adalah orde kedua dengan Redaman Kurang (*Underdamped system*), karena $0 < \zeta < 1$

14.2 Karakteristik Sistem Orde Kedua

Dari kemungkinan-kemungkinan sistem yang ada, sistem Redaman Kurang (*underdamped system*) memiliki sifat dan fitur yang unik dan menarik. Sehingga, sebagian besar analisa dan perancangan sistem orde kedua, mendekatinya dengan menggunakan model redaman kurang ini.

Plot dari sistem redaman kurang dengan beberapa harga ζ dapat dilihat pada Gambar 14.1. Dari gambar tersebut, nampak bahwa semakin besar harga rasio redaman, ζ, sistem semakin berosilasi namun memiliki respon yang semakin cepat.



Gambar 14.1 Respon Waktu Sistem Underdamped untuk beberapa harga ζ

Sifat-sifat sistem orde kedua akan dibahas dalam bentuk beberapa karakteristik, dengan memandang plot umum respon waktu keluaran orde kedua seperti tampak pada Gambar 14.2.

Beberapa karakteristik Sistem Orde Kedua, adalah:

Konstanta Waktu (*Time Constant*), τ

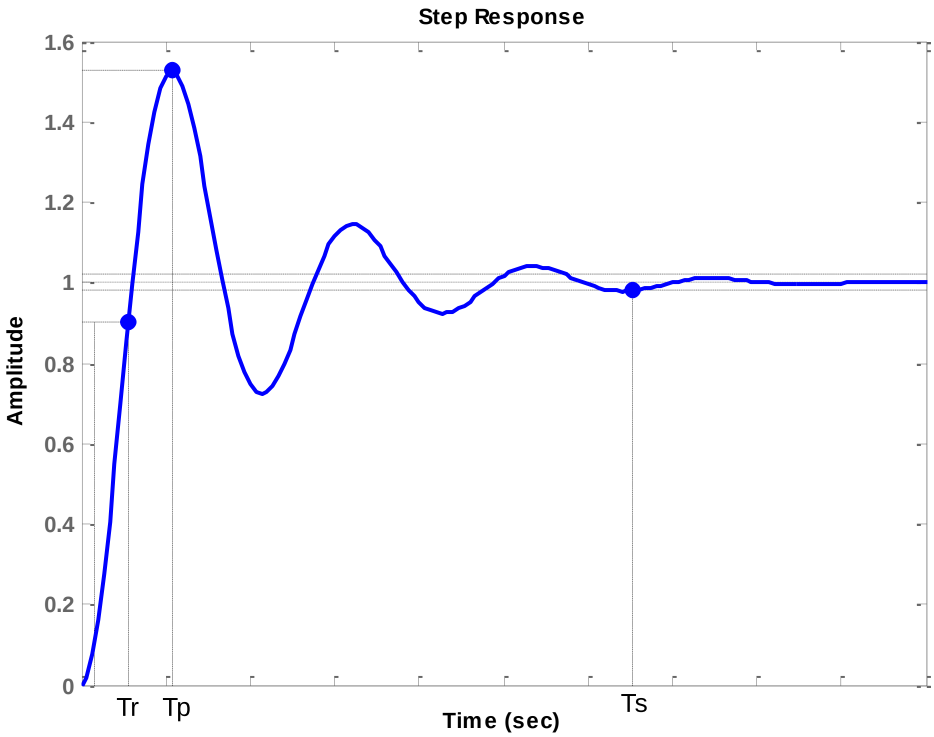
Konstanta Waktu, sebagaimana Sistem Orde Pertama, adalah waktu yang dibutuhkan oleh respon untuk mencapai keluaran sebesar 0.67 dari harga seharusnya. Harga Konstanta Waktu adalah:

$$\tau = \frac{1}{\varsigma\omega_n} \tag{14.8}$$

Waktu Puncak (*Peak Time*), Tp

Yaitu waktu yang dibutuhkan untuk mencapai harga puncak pertama dari sistem, dimana puncak adalah harga maksimum dari keluaran sistem. Harga Tp adalah:

$$T_P = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}} \qquad (14.9)$$



Gambar 14.2 Karakteristik Umum Plot Sistem Orde Kedua

Persentase Tembakan Lebih (% *Overshoot*), %OS

Overshoot terjadi apabila harga keluaran sistem melebihi dari harga yang dikehendaki. Besarnya selisih harga *overshoot* dengan harga yang dikehendaki dalam hitungan persentase inilah yang disebut dengan %*OS*. Harga persen *OS* adalah:

$$\%OS = e^{-(\varsigma\pi / \sqrt{1-\varsigma^2})} \times 100 \text{, atau} \qquad (14.10)$$

$$\varsigma = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \qquad (14.11)$$

Waktu Naik (*Rise Time*), Tr

Yaitu waktu yang dibutuhkan agar sistem naik dari harga 0.1 hingga 0.9 dari harga yang dikehendaki. Namun, tidak dapat diketemukan hubungan langsung antara ζ, ω_n denga harga Tr.

Waktu Mantap (*Settling Time*), Ts

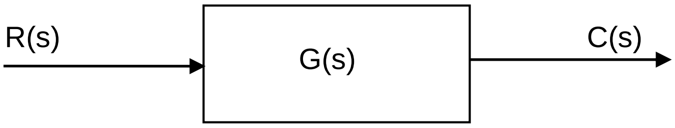
Yaitu waktu yang diperlukan agar sistem mendekati harga yang dikehendaki, dengan toleransi kesalahan ± 2%. Biasanya, Ts didekati dengan harga:

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\varsigma\omega_n} \qquad (14.12)$$

Berikut ini ditampilkan beberapa contoh perhitungan dan perancangan karakteristik sistem orde 2.

Contoh 14.2

Sebuah sistem memiliki blok diagram sebagai berikut:



dengan fungsi alih, *G*(*s*) sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{120}{s^2 + 12s + 120}$$

tentukan harga-harga berikut ini: ζ, ω_n, τ , Tp, Ts dan %OS!

maka:

$\omega_n = \sqrt{120} = 10.95$

$\zeta = 12/(2)(10.95) = 0.55$

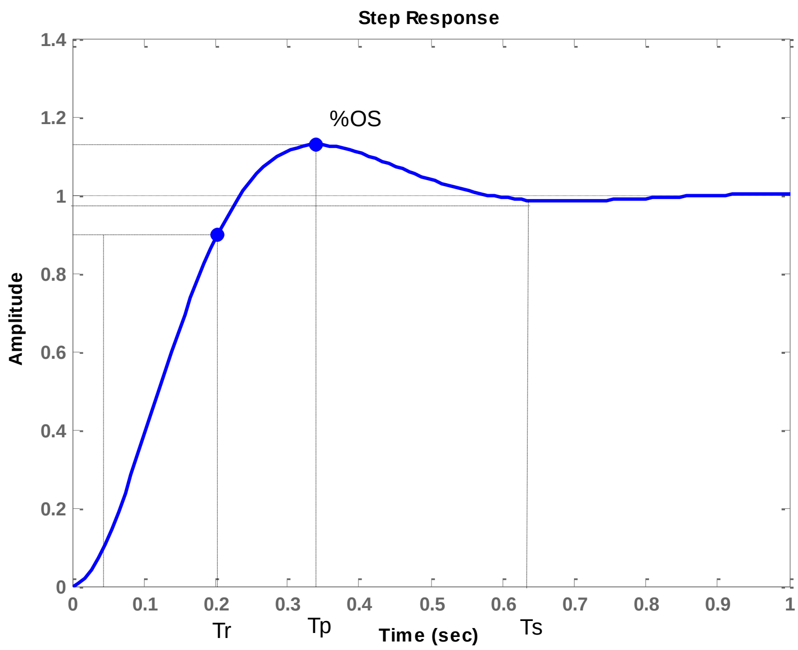
$\tau = 1/(\omega_n)(\zeta) = 1/(10.95)(0.55) = 0.16$ s

$$T_P = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} = \frac{3.14}{10.95\sqrt{1-0.55^2}} = 0.34s$$

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\varsigma\omega_n} = 4\times 0.16 = 0.64s \text{ , dan}$$

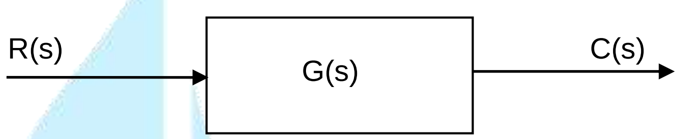
$$\%OS = e^{-(\varsigma\pi/\sqrt{1-\varsigma^2})}\times 100 = e^{-(0.55\times 3.14)/\sqrt{1-0.55^2}}\times 100$$
$$= e^{-2.06}\times 100 = 0.127\times 100 = 12.75\%$$

Plot dari sistem orde kedua tersebut adalah:



Contoh 14.3

Sebagaimana Contoh 14.2, tentukan pula karakteristik sistem orde kedua dari blok diagram berikut ini:



dengan fungsi alih, $G(s)$ sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

maka:

$\omega_n = 10$

$\zeta = 0.75$

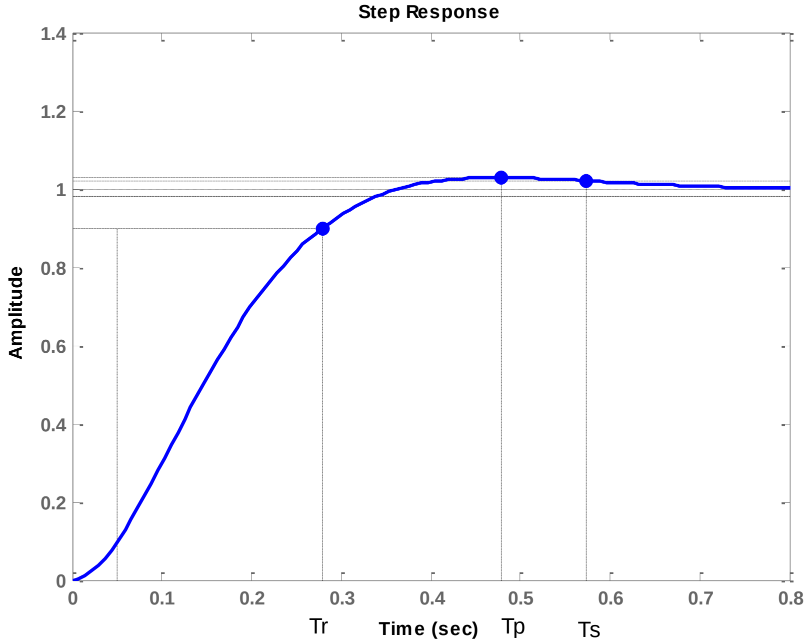
$\tau = 0.133$ s

Tp = 0.475 s

Ts = 0.535 s

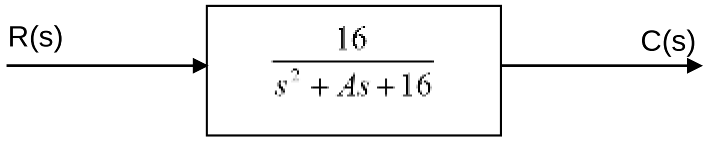
%OS = 2.838 %

Plot respon keluaran sistem adalah:



Contoh 14.4

Jika diketahui sebuah blok diagram sistem orde kedua, sebagai berikut:



berarti fungsi alih sistem adalah:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + As + 16}$$

dimana diketahui bahwa %OS adalah 30%. Maka, tentukan harga ω_n, ζ, τ , Tp, Ts dan A!

Dari persamaan (14.11):

$$\varsigma = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

$$\varsigma = \frac{-\ln(0.3)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.3)}} = 0.35$$

$\omega_n = \sqrt{16} = 4$

τ = 0.71 s

Tp = 0.82 s

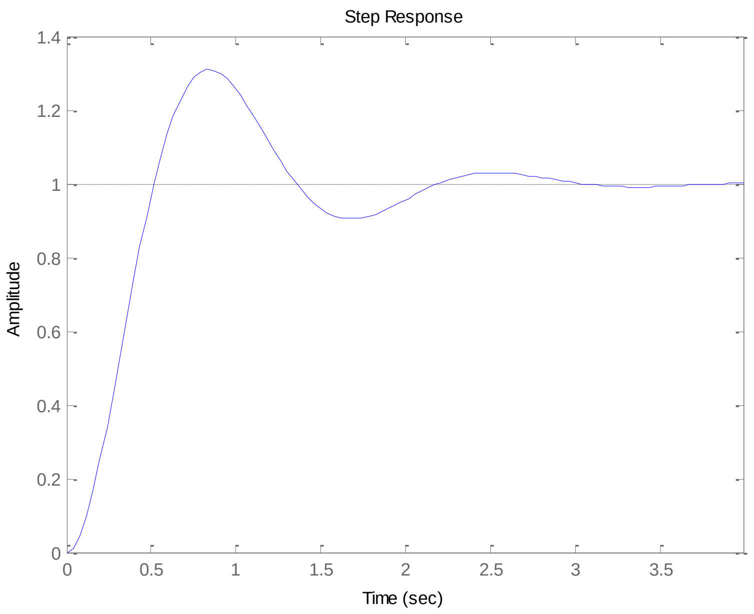
Ts = 2.84 s

A = 2 $\zeta\,\omega_n$ = 2 (0.35) (4) = 2.8

Sehingga, Fungsi Alih sistem lengkapnya adalah sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 2.8s + 16}$$

Fungsi alih ini, jika diplot respon waktunya ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Pada gambar tersebut, tampak bahwa respon paksaan adalah menuju harga 1 (*Unit Step*). Sedangkan, *overshoot* terjadi sekitar pada waktu Tp = 0.8 s dengan persentase sebesar 30 % (overshoot terjadi hingga respon mendekati 1.3). Disamping itu, sistem akan mencapai keadaan mantap pada waktu Ts = 2.8 s. Hal ini membuktikan bahwa perhitungan dan perancangan harga *A* telah sesuai dengan karakteristik yang diinginkan.



Daftar Pustaka

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Pantur Slaban, Rangkaian Listrik Jilid 2

Bpk. Said Attamimi, ST, MT, Sistem Linier

Bpk Ridwan Gunawan, Matematika Terapan, Universitas Indonesia

Katsuhiko Ogata, Discrete Time Control system, Prentice Hall International Editions

And another related books